جزوه معادلات دیفرانسیل

مدرس: اسماعیلی

شماره تماس:۰۹۱۴۹۲۳۸۸۲۶

Collage.miyaneh@yahoo.com

تهیه کننده: بهروز اکرمی

منابع :

- معادلات ديفرانسيل دانشگاه پيام نور
- معادلات ديفرانسيل دكتر مسعود نيكوكار

نمره پاياني درس:

- نمره پايان ترم (۱۰ نمره)
- نمره ميان ترم (۵ نمره)
- حل تمرينات و فعاليت كلاسي (۵ نمره) {تمرينات به صورت متناوب در هر جلسه ارائه مي‌شود كه دانشجو تا جلسه آينده مهلت تحويل دارد}

سرفصلهاي معادلات ديفرانسيل

فصل اول: معادله ديفرانسيل مرتبه اول

۱- ماهيت معادلات ديفرانسيل و طبقه بندي آنها

۲- معادله ديفرانسيل جدا شدني و تبديل به آن

۳- معادله ديفرانسيل همگن و تبديل به آن

۴- دسته منحني ها و دسته منحني هاي متعامد

۵- معادله ديفرانسيل كامل

۶- عامل انتگرال ساز

۷- معادله ديفرانسيل مرتبه اول خطي و تبديل به آن

فصل دوم: معادلات ديفرانسيل مرتبه دوم و بالاتر

۱- معادله ديفرانسيل مرتبه دوم حالت خاص فاقد x يا y

۲- معادله ديفرانسيل مرتبه دوم

۳- معادله ديفرانسيل مرتبه nام

۴- معادلات ديفرانسيل كشي-اويلر

فصل سوم: دستگاه معادلات ديفرانسيل

فصل چهارم: تبديلات لاپلاس

۱- تبديل لاپلاس

۲- خواص تبديل لاپلاس

۳- معكوس تبديل لاپلاس

۴- حل معادله ديفرانسيل به روش لاپلاس

فصل پنجم: حل معادله ديفرانسيل به روش سري‌ها

۱- سري تواني

۲- نقاط معمولي ومنفرد وجواب هاي سري معادلات ديفرانسيل

۳- نقاط منفرد منظم معادلات ديفرانسيل خطي مرتبه دوم

۴- حالتي كه معادله شاخص داراي ريشه هاي برابر است

فصل اول: معادله ديفرانسيل مرتبه اول

ماهيت معادله ديفرانسيل وطبقه بندي آن

مقدمه: با مفهوم معادله يعني رابطه اي كه درآن تساوي باشد، آشنا هستيم. ساده ترين آن، معادله يک مجهولي مي باشد، كه بانماد $f(x)=0$ نشان مي دهيم.

$ax+b=0$ معادله يک مجهولي درجه اول

$ax^2+bx+c=0$ معادله يک مجهولي درجه دوم

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ معادله يک مجهولي درجه سوم

و الي آخر

معادله دو مجهولي كه بانماد $f(x,y)=0$ نشان مي دهيم

$ax+by+c=0$ معادله دو مجهولي درجه اول

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

معادله دو مجهولي درجه دوم

و الي آخر

درمورد معادله دونوع سوال قابل طرح مي باشد:

أ- آيا x_0 جواب معادله $f(x)=0$ يا جفت (x_0, y_0) جواب معادله $f(x,y)=0$ مي باشد؟

ب- جواب معادله $f(x)=0$ يا $f(x,y)=0$ را پيدا كنيد؟

جواب دادن به سوال اول ساده مي باشد زيرا با جايگذاري مي توان مشخص كرد. ولي جواب دادن به سوال دوم مشكل مي باشد. ابتدا بايد معادلات را دسته بندي كرده و براي هر نوع روش خاصي را ارائه داده بعبارت ديگر براي حل معادله بايد دو مرحله را مشخص كنيم:

1) مرحله شناخت

۲) مرحله حل(روش حل)

حـال اگـر درمعادله $f(x,y)=0$ متغيـر x را بعنـوان متغير مستقل و y را بعنوان متغير وابسته درنظر بگيريم آن گـاه x تـابعي از y مـي باشد و مـي تـوان درمـورد مشتق تابع صحبت كرد يعني :

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = y^{(2)},\quad \dots\quad ,y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

تعريف : معادلـه اي كـه شـامل تركيبـاتي از x (متغيـر مسـتقل) و y (متغير وابسته) و مشتقات آن باشد، را معادلـه ديفرانسيل نـاميم و بـا نماد $f\left(x, y, y', y'',\dots, y^{(n)}\right) = 0$ نشان مي دهيم.

درمورد معادله ديفرانسيل نيز مي توان دو سوال طرح كرد:

الف) آيا تابع $f(x,y) = 0$ جواب معادله ديفرانسيل مي باشد؟

ب) جواب هاي معادله ديفرانسيل را پيدا كنيد؟

باز جواب دادن به سوال الف) ساده است (بـا جايگذاري) مثلا آيا تابع $y = e^{2x}$ جواب معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ ميباشد؟

جواب دادن بـه سـوال ب) مـشكل مـي باشـد و بـستگي بـه نـوع معادلـه وطبقـه بنـدي آن دارد. بـاتعريف مرتبـه و درجـه معادلـه ديفرانسيل به سراغ سوال ب) مي رويم.

تعريف: بيشترين تكرار مشتق در هر معادلـه را مرتبـه آن و توان بيشترين تكرار مشتق را درجه معادله ديفرانسيل ناميم.

مثال :

معادله $(y')^3 + y^4 = x^5$ مرتبه اول، درجه سوم مي باشد.

۲) معادله $\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = x$ مرتبه سوم ، درجه اول مي باشد.

۳) معادله $y^{(2)} + y^{(3)} = y^4$ مرتبه سوم ، درجه اول مي باشد.

مشابه معادله معمولي با توجه به تعريف مرتبـه و درجـه معادلـه ديفرانسيل مي توان آنها راطبقه بندي كرد. بنـابراين سـاده‌ترين معادله ديفرانسيل مرتبه اول بصورت $f(x, y, y') = 0$ مـي باشد كـه اگر تـوان y' برابر بـا يـك باشد آنگـاه معادلـه ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول مي باشد

كه بصورت كلي زير نيز نشان داده مي شود.

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = F(x,y)$$

تعريف: معادله ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول به صورت

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

را معادله جدا شدني نـاميم (مرحلـه شناخت). هر معادله مرتبـه اول درجه اول جداشدني را اختصارا معادله جداشدني (جدايي پذير)ناميم. هر معادله جدا شدني را مي توان بصورت كلي

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

تبديل كرد.

حل معادله ديفرانسيل جداشدني: با انتگرالگيري از معادله جداشدني $M(x)dx+N(y)dy=0$ مي توان جواب آنرا محاسبه كرد.

تذكر: هدف از حل معادله ديفرانسيل محاسبه جواب عمومي معادله ديفرانسيل مي باشد. جوابي را جواب عمومي ناميم هرگاه تعداد پارامترها به تعداد مرتبه معادله ديفرانسيل باشد كه بعدا آنرا دقيقا تعريف خواهيم كرد.

مثال : معادله $y'=\dfrac{x^2+x}{y^2-y}$ را حل مي كنيم.

حل :داريم $\Leftarrow$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+x}{y^2-y}$ $\Leftarrow$ آنگاه

$$(x^2+x)dx+(y-y^2)dy=0$$

$$\int (x^2+x)dx+\int (y-y^2)dy=\int 0$$

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3=c$$

درنتيجه عبارت آخر جواب (عمومي)معادله است .

مثال: راديم در هر لحظه با آهنگي متناسب با جرمش متلاشي مي شود اگر ۱۰۰ ميلي گرم پس از يک قرن به ۹۸ ميلي گرم تبديل شود مطلوبسيم باقي مانده پس از ۳ قرن:

حل: فرض كنيم $Q(t)$ مقدار راديم باقي مانده پس از t قرن باشد داريم:

$$\frac{dQ}{dt}\propto Q \Rightarrow \frac{dQ}{dt}=kQ \Rightarrow \frac{dQ}{Q}=kdt \Rightarrow$$

$$\int\frac{dQ}{Q}=\int kdt \Rightarrow \ln Q=kt+c \Rightarrow$$

$$Q(t)=e^c.e^{kt} \Rightarrow \begin{cases} Q(0)=100 \rightarrow e^c=100 \\ Q(1)=98 \rightarrow k=-0.02 \end{cases}$$

$$Q(t)=100e^{-0.02t}$$

معادله ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول ممكن است به ظاهر جداشدني نباشد ولي با تقسيم بر عباراتي يا تغيير متغير مي‌توان آن را تبديل به جدا شدني نمود.

مثال: معادله $(y+1)(x^2+1)dx+(x+1)(y^2+1)dy=0$

به ظاهر جدا شدني نيست، ولي با تقسيم برحاصلضرب عبارات اضافي $(x+1)(y+1)$ داريم $\dfrac{x^2+1}{x+1}dx+\dfrac{y^2+1}{y+1}dy=0$

كه جدا شدني است پس با انتگرالگيري داريم :

$$\frac{1}{2}x^2-x+2\ln(x+1)+\frac{1}{2}y^2-y+2\ln(y+1)=c$$

جواب معادله است .

مطلوبست حل معادله زير:

$$(x^2+y^2)(xdy+ydx)-3xy(xdx+ydy)=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=u \Rightarrow 2(xdx+ydy)=du \\ xy=t \Rightarrow xdy+ydx=dt \end{cases} \Rightarrow udt-3t(\frac{1}{2}du)=0$$

$$\frac{dt}{t}-(\frac{3}{2}\frac{du}{u})=0 \Rightarrow \int\frac{dt}{t}=\int(\frac{3}{2}\frac{du}{u})$$

$$\ln t=\frac{3}{2}\ln u+c \Rightarrow \ln(\frac{t}{u3/2})=c$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير و يافتن جواب عمومي و و خصوصي در صورت وجود شرايط اوليه:

$$1)\ x\sqrt{1-y}\ dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$$

$$2)\ 2x(y+1)dx-ydy=0 \qquad y(0)=-2$$

$$3)\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$4)\ x\cos y\ dx+\sqrt{1+x}\sin y\ dy=0$$

معادله دیفرانسیل همگن

میدانیم معادله مرتبه اول درجه اول بصورت $y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

و یا به صورت $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ مـي باشد.

مثلا معادلات

$$1)\ \ y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \qquad 2)\ \ y' = \frac{x^2+y}{y^2+x},$$

معادلات مرتبه اول درجه اول مي باشند كه هيچكدام جدا شدني نيستند ولـي معادلـه اولـي داراي خاصـيتي مـي باشـد كـه معادلـه دومي نيست. درمعادله ديفرانسيل اول تمام جملات توابع

$$z = g(x,y)\ ,\ z = f(x,y)$$

از توان يكسان دو مي باشد ولي معادله دومي چنين نيست. اين مفهوم رابانماد رياضي تعريف مي كنيم.

تعریف : تابع دو متغيره $z = f(x,y)$ را تـابع همگـن از درجه n ناميم هرگاه درشرط زير صدق كند:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

تابع $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ تـابع همگـن ازدرجـه دو میباشد.

تابع $f(x,y) = xe^{\frac{y}{x}} + y\sin\dfrac{y}{x}$ تـابع همگن از درجـه يـک میباشد.

تعريف: معادله ديفرانسيل

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

را معادلـه همگن نـاميم هـر گـاه توابـع دو متغيـره f و g توابـع همگن از درجه يكسان باشند. بعبارت ديگر معادله ديفرانسيل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

را معادلــه همگــن نــاميم هــر گــاه توابــع دو متغيــره M و N توابع همگن از درجه يكسان باشند.

حل معادله ديفرانسيل همگن:

فرض كنيم معادله $y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ همگن باشد. با فرض تغيير متغير $v = y/x$ داريم

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad y' = v'x + v \quad OR \quad dy = vdx + xdv$$

آن گاه با جايگذاري درمعادله نتيجه مي شود كه

$$v'x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = \frac{dx}{x}$$

كـه معادلـه اخير جدا شـدني است مـي تـوان آنـرا بـه روش جدا شدني حل كرد وبا جايگذاري $v = y/x$ جــــواب معادلـــــه ديفرانسيل اوليه بدست مي آيد.

مثال: معادله ديفرانسيل همگن $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$

را حل مي كنيم باجايگذاري $y = vx$ و $dy = vdx + xdv$

داريم:

$$(x^2 + v^2x^2)dx + xvx(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 + v^2x^2 + v^2x^2)dx + x^3vdv = 0$$

$$x^2(1 + 2v^2)dx + x^3vdv = 0$$

$$(1 + 2v^2)dx + xvdv = 0$$

با تقسيم برحاصلضرب عبارات اضافي $x(1 + 2v^2)$

داريم:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{1+2v^2}dv = \int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{4}\ln(1+2v^2) = \ln c$$

تذكر: براي ساده كردن به جاي c معمولا $\ln\ c$ را بعنوان پارامتر ثابت اختيار مي كنيم.

$$\ln x\,(1+2v^2)^{\frac{1}{4}} = \ln c \quad \Rightarrow \quad x\sqrt[4]{(1+2v^2)} = c \quad \Rightarrow$$

$$x\sqrt[4]{(1+\frac{2y^2}{x^2})} = c$$

جواب معادله ديفرانسيل مي باشد.

تمرين: مطلوبست حل معادله ديفرانسيل زير؟

$$1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-y)}{x-4y}$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

معادلات با ضرايب خطي:

معادلات به صورت $(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy = 0$

معادلات با ضرايب خطي گويند.

حل معادلات با ضرايب خطي:

حالت اول: اگر دو خط در نقطه (h,k) متقاطع باشند با تغيير متغير $x= X+h$ و $y=Y+k$ معادله به معادله همگن تبديل ميشود.

حالت دوم: اگر اين دو خط موازي باشند با تغيير متغير

$a_1x + b_1y=z$ معادله به معادله جداشدني تبديل مي‌شود

مطلوبست حل معادلات ذير:

$$1)\ (x+y-1)\,dx+(x-y)\,dy=0$$

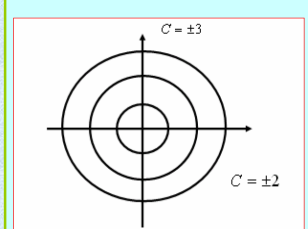
$$2)\ (2x+2y-1)\,dx+(x+y)\,dy=0$$

دسته منحني ها و دسته منحني هاي متعامد

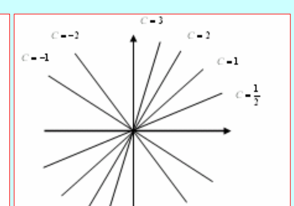
ملاحظه شد كه جواب عمومي هر معادله ديفرانسيل مرتبه اول معمولا شامل يک ثابت اختياري موسوم به پارامتر است. وقتي مقادير مختلفي به اين پارامتر نسبت داده مي شود، يک دسته منحني به دست مي آيد هر يک از اين منحني ها يک جواب خصوصي معادله ديفرانسيل مفروض است و همه آنها با هم جواب عمومي آن را تشكيل مي دهند. بنابراين معادله

$f(x,y,c)=0$ به ازاي مقادير مختلف براي پارامتر c يک دسته منحني مي‌باشد .

حال مي خواهيم دسته منحني هاي متعامد بر يک دسته منحني مفروض را با استفاده از معادله ديفرانسيل بدست آوريم كه كاربردي از معادله ديفرانسيل مي باشد. بعنوان مثال تعدادي دسته منحني را در زير رسم مي كنيم :



الف) $X^2+Y^2=C^2$



ب) $Y=CX$

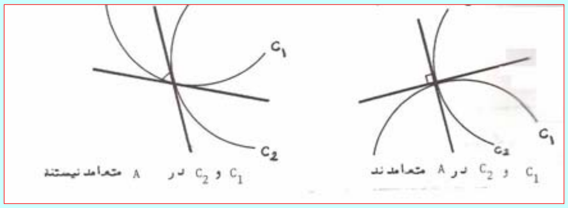
حال با توجه به مطالب بالا و با استفاده از روند زیر مي توان دسته منحني هاي متعامد بریک دسته منحني ها را پیدا کرد :

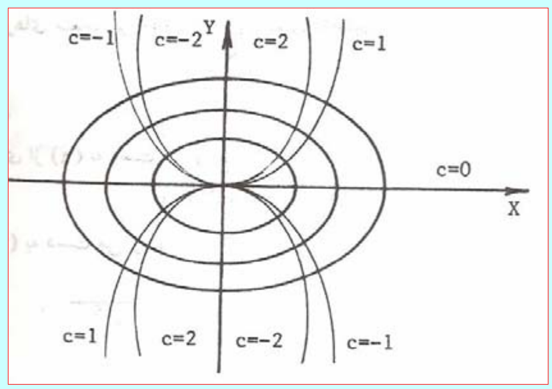
$$f(x,y,c)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y,y')=0$$

معادله دسته منحني ها — معادله دیفرانسیل دسته منحني ها

$$\xrightarrow{y'=-\frac{1}{y'}} f\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad g(x,y,c)=0$$

معادله دیفرانسیل دسته منحني هاي متعامد — معادله دسته منحني هاي متعامد





مثال : دسته منحني هاي متعامد بردسته منحني هاي دوایر به مرکز مبدا وشعاع دلخواه رابدست مي آوریم:

$$x^2+y^2=c^2 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow x+yy'=0$$

$$\xrightarrow{y'\to-\frac{1}{y'}} x+y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0 \Rightarrow x=\frac{y}{y'} \Rightarrow xy'=y$$

$$x\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln c$$

$$\Rightarrow \ln y=\ln cx \Rightarrow y=cx \leftarrow$$ دسته منحني هاي متعامد

مثال : دسته منحني هاي متعامد بردسته منحني هاي $x^2+y^2=2cx$

را درمختصات قطبي بدست مي آوریم. معادله دسته منحني ها در مختصات قطبي عبارت است از: $r=2c\cos\theta$

بنابراین : $\frac{dr}{d\theta}=-2c\sin\theta$

که با جایگذاري مقدار c داریم:

$$-\frac{dr}{d\theta}=\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\sin\theta \quad \Rightarrow \quad -\frac{rd\theta}{dr}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

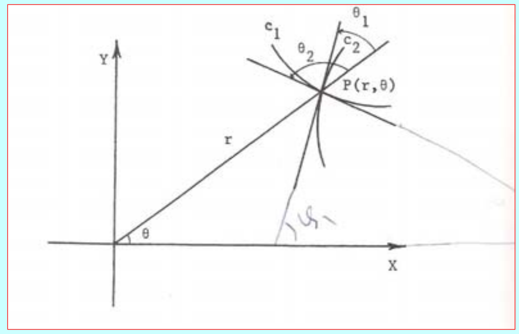
اغلب مناسب است که دسته منحني هاي داده شده را برحسب مختصات قطبي بیان کنیم دراین حالت از این موضوع استفاده مي کنیم که اگر φ زاویه بین شعاع حامل و خط مماس باشد آن گاه $\tan\varphi=\frac{rd\theta}{dr}$ (ریاضي عمومي). با استفاده بحث بالا براي یافتن دسته منحني هاي متعامد درمعادله دیفرانسیل دسته منحني داده شده به جاي عبارت $\frac{rd\theta}{dr}$ منفي عكس آن یعني $-\frac{dr}{rd\theta}$ را جایگذاري مي کنیم.

که با جایگذاري $-\dfrac{dr}{rd\theta}$ به جاي $\dfrac{rd\theta}{dr}$ داريم:

$$-\frac{dr}{rd\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dr}{r}=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$\ln r=\ln\sin\theta+\ln 2c\quad\Rightarrow\quad\ln r=\ln 2c\sin\theta\Rightarrow$$

معادله دسته منحني هاي متعامد مي باشد. $\leftarrow r=2c\sin\theta$



معادله ديفرانسيل كامل

در رياضيات عمومي با ديفرانسيل توابع دو متغيره $z=f(x,y)$ آشنا شديم و ملاحظه کرديم که ديفرانسيل کامل تابع را که با نماد df نشان مي دهيم، عبارت است از

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

و همچنين معادله ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول بصورت کلي $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ مي باشد.

تعريف :معادله ديفرانسيل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

را معادله كامل ناميم هر گاه تابع دو متغيره $z=f(x,y)$ موجود باشد بطوري که $\dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

با توجه به تعريف بالا تعيين اينکه معادله ديفرانسيل داده شده کامل مي باشد، مشکل است زيرا بايد تمام توابع دو متغيره راجستجو کنيم و ملاحظه کنيم که بترتيب کدام تابع داراي مشتقات جزيي نسبت به x و y برابر با توابع $M=M(x,y)$ و $N=N(x,y)$ مي باشد.

اگر اين کار امکان پذير هم باشد، مشکل است به همين دليل شرايطي روي M، N بدست مي آوريم که وجود چنين تابعي را تضمين کند. با مشتق گيري جزيي از طرفين رابطه هاي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\qquad\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$$

با مشتق گيري نسبت به x و y داريم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

با توجه به اينکه براي توابع پيوسته داريم: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

بنابراين: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

بنابراين شرط كامل بودن معادله ديفرانسيل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

عبارت است از :

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

(مرحله شناخت).

مثال : کامل بودن معادلات ديفرانسيل زير را بررسي نماييد.

$$(2x+y)dx+\left(x+3y^2\right)dy=0$$

پس کامل ميباشد

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1=\frac{\partial N}{\partial x}=1 \quad \longleftarrow$$

ب)

$$\left(2xy^3+y\right)dx+\left(3x^2y^2+3y^2+x\right)dy=0$$

پس کامل ميباشد

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy^2+1=\frac{\partial N}{\partial x}=6xy^2+1$$

حل معادله ديفرانسيل کامل:

فرض کنيم که معادله ديفرانسيل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

کامل باشد بنابر تعريف معادله ديفرانسيل کامل، تابعي مانند $z=f(x,y)$ موجود است که:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

پس بنابر تساوي هاي بالا نتيجه مي شود $df=0$

ويا $f=c$ جواب معادله ديفرانسيل مي باشد .

تنها معلومات، مشتقات جزيي f مي باشد که با استفاده از روند زير مي توان آنرا محاسبه کرد.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\xrightarrow{\int x} f=\int M(x,y)dx+\varphi(y)\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int m(x,y)dx+\varphi'(y)$$

آن گاه با استفاده از رابطه دوم $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ مقدار $\varphi'(y)$ بدست مي آيد که با انتگرال گيري از آن مجهول که همان $\varphi(y)$ ميباشد محاسبه مي شود در نتيجه f بدست مي آيد که $f=c$ جواب معادله ديفرانسيل است .

مثال: ملاحظه شد که معادله

$$(2x+y)dx+\left(x+3y^2\right)dy=0$$

کامل مي باشد پس:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y\xrightarrow{\int x} f=x^2+yx+\varphi(y)\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\varphi'(y)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2\Rightarrow x+\varphi'(y)=x+3y^2\Rightarrow\varphi'(y)=3y^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\varphi(y)=y^3\Rightarrow f=x^2+yx+y^3\xrightarrow{df=0}x^2+yx+y^3=c$$

جواب معادله ديفرانسيل است.

عامل انتگرال ساز

معادله ديفرانسيل $ydx-\left(x^2+x\right)dy=0$ کامل نمي باشد زيرا

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-2x-1,\frac{\partial M}{\partial y}=1$$

ولي اگر طرفين معادله بالا را در $u=\frac{1}{x^2}$ ضرب کنيم داريم:

$$\frac{y}{x^2}dx-\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

واين معادله ديفرانسيل جديد کامل مي باشد زيرا

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2},\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$$

و مي توان به روش کامل معادله ديفرانسيل جديد را حل کرد .

بنابراين ممکن است معادله ديفرانسيل کامل نباشد ولي باضرب کردن عاملي درتابع که آنرا عامل انتگرال ساز گوييم تبديل به کامل کرد. اکنون شرط وجود عامل انتگرال ساز وچگونگي محاسبه آن را بيان مي کنيم.

فرض کنيم که معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ کامل نباشد يعني $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ ودارای عامل انتگرال ساز باشد، آنگاه طبق تعريف عامل انتگرال ساز $u=u(x,y)$ معادله جديد کامل مي‌باشد.

$$uMdx+uNdy=0$$

با توجه به شرط كامل بودن داريم

$$u\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial x}$$

كه محاسبه u از اين معادله ممكن نيست به همين دليل تحت شرايط خاصي عامل انتگرال ساز را بررسي مي كنيم.

الف) فرض مي كنيم كه عامل انتگرال ساز فقط تابعي از x باشد يعني $u=u(x)$ ، آن گاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

كه با جايگذاري داريم:

$$u\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial x}\quad\Rightarrow$$

$$p(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\quad\rightarrow\left[u=e^{\int p(x)dx}\right]$$

ب) فرض مي كنيم كه عامل انتگرال ساز فقط تابعي از y باشد يعني $u=u(y)$ ، آ نگاه

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

كه با جايگذاري داريم:

$$u\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial x}\quad\Rightarrow$$

$$q(y)=\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Rightarrow\left[u=e^{\int q(y)dy}\right]$$

مثال :عامل انتگرال سازي براي معادله $xy\,dx+(1+x^2)dy=0$ را پيدا مي كنيم.

حل: ابتدا مقدار مشترک محاسبه مي كنيم

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-2x=-x$$

كه با تقسيم بر $-M$ مقدار به دست آمده داريم:

$$q(y)=\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-xy}(-x)=\frac{1}{y}$$

پس $u=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$ عامل انتگرال ساز مي باشد.

تذكر: گاهي معادله ديفرانسيل غير كامل داراي عامل انتگرال سازي بصورت $u(x,y)=x^n y^m$ است، كه درآن m، n ثابتهاي مناسبي هستند.

براي يافتن عامل انتگرال سازي به صورت $u(x,y)=x^n y^m$ طرفين معادله را درآن ضرب مي كنيم واز شرط كامل بودن استفاده مي كنيم.

تذكر: روش دسته بندي يا كوتاه

گاهي با جستجو كردن مي توان معادله ديفرانسيل را به يكي از حالات زير دسته بندي كرد:

$$M(x)dx=N(y)dy$$
$$M(x)dx=d(v(x,y))$$
$$d(u(x,y))=N(y)dy$$
$$d(u(x,y))=d(v(x,y))$$

كه به سادگي مي توان با انتگرال گيري از طرفين معادلات جواب آنها را بدست آورد .

مثال: معادله ديفرانسيل $(y^2+y)dx-xdy=0$ را با روش دسته بندي حل مي كنيم.

حل:

$$(y^2+y)dx-xdy=0 \Rightarrow ydx-xdy=-y^2dx \Rightarrow$$
$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-dx \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right)=-dx \xrightarrow{\int}$$
$$\frac{x}{y}=-x+c \Rightarrow y=\frac{x}{c-x}$$

يادآوري:

$$1)\rightarrow \quad d(xy)=ydx+xdy$$
$$2)\rightarrow \quad d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$
$$3)\rightarrow \quad d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{-ydx+xdy}{x^2}$$
$$4)\rightarrow \quad d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$
$$5)\rightarrow \quad d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}$$
$$6)\rightarrow \quad d(\tan^{-1}(xy))=\frac{ydx+xdy}{1+x^2y^2}$$
$$7)\rightarrow \quad d(\ln(x^2+y^2))=2\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

$$1)\ y\,dx+(x+y^2)dy=0$$
$$2)\ \frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{xe^y+2y}$$
$$3)\ (y^2+y)dx-x\,dy=0$$
$$4)\ \frac{ydx-xdy}{y^2}+y^2dy=0$$
$$5)\ xy\,dx+(1+x^2)dy=0$$
$$6)\ (x^2+xy^2)y'-3xy+2y^3=0$$
$$7)\ x\,dy-y\,dx=(4x^2+9y^2)(4x\,dx+9y\,dy)$$

تمرين:

۱- شكل آينه مقعري را به دست بياوريد كه اگر از منبع نوراني نوري به آن بتابانيم موازي محور x ها منعكس شود.

۲- استخري به عرض ۱۰ متر در نظر ميگيريم.پسري در يک طرف استخر قايقي را از آن سمت استخر به طرف خود مي‌كشد حال اگر اين پسر حين كشيدن قايق در عرض استخر در طول استخر نيز با سرعتي معلوم بدود مطلوبست مسير قايق بعد از t ثانيه.

با تقسيم طرفين بر f_1 معادله مرتبه اول خطي بصورت كلي است زير در مي آيد (مرحله شناخت)

$$y'+p(x)y=q(x)$$

براي مثال معادلات زير مرتبه اول خطي هستند:

$$1)\quad y'+\frac{1}{x}y=x^3$$
$$2)\quad y'+\frac{1}{x}y=e^x$$
$$3)\quad y'-2xy=e^{x^2}$$

معادله ديفرانسيل مرتبه اول خطي

ملاحظه شد كه معادله مرتبه اول بصورت $f(x,y,y')=0$ ميباشد كه اگر توان هاي y',y برابر با يک باشد آنرا معادله مرتبه اول خطي ناميم (در معادله خطي $ax+by=c$ نيز توان x و y برابر با يک مي باشد ولي اگر توان يكي از آنها به غير يک باشد آن گاه معادله منحني مي باشد) بنابراين معادله مرتبه اول خطي به صورت زير مي‌باشد

$$f_1(x)y'+f_2(x)y=f_3(x)$$

براي حل معادله ديفرانسيل $y' + p(x)y = q(x)$ طـــرفين اين معادله را در عامل انتگرال ساز $u = e^{\int p(x)dx}$ ضرب مي‌كنيم كه با ضرب اين عامل در معادله جواب عمومي معادله مرتبه اول خطي به شكل زير در مي آيد.

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx + c\right]$$

مثال : معادله مرتبه اول خطي $y' + \frac{1}{x}y = x^3$ را حل مي كنيم.

$$q(x) = x^3 \qquad p(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}.x^3dx + c \Rightarrow$$

$$y = e^{-\ln x}[\int e^{\ln x.}.x^3dx + c] \Rightarrow y = e^{\ln x^{-1}}[\int x.x^3dx + c] \Rightarrow$$

$$y = x^{-1}\left(\frac{1}{5}x^5 + c\right) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{c}{x}$$

جواب معادله ديفرانسيل است.

حالت خاصي از معادلات مرتبه اول خطي به صورت

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

مي باشد كه توان هاي $x' = \frac{dx}{dy}$ و x برابر با يک مي باشد. با توجه به روش حل معادله مرتبه اول خطي با تعويض نقش x با y وبالعكس نتيجه مي شود كه

$$x = e^{-\int p(y)dy}[\int e^{\int p(y)dy}.q(y)dy + c]$$

حالت خاصي از معادلات مرتبه اول كه تبديل به خطي مي‌شود به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^n$ مي باشد كه به ازاي $n = 0$ معادله مرتبه اول خطي است، $n = 1$ معادله جدا شدني است وبه ازاي $n \neq 0,1$ ، معادله برنولي ناميده مي شود. معادله ديفرانسيل برنولي را مي توان با تغيير متغير $z = y^{1-n}$ حل كرد و داراي جواب است.

$$z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)p(x)dx}[\int e^{\int (1-n)p(x)dx}.(1-n)q(x)dx + c$$

مثال: معادله $y' + \frac{1}{x}y = x^3y^4$ را حل مي كنيم.

$$q(x) = x^3 \qquad p(x) = \frac{1}{x} \qquad n = 4 \qquad 1 - n = -3$$

$$y^{-3} = e^{-\int (-3)\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int (-3)\frac{1}{x}dx}.(-3)x^3dx + c] \Rightarrow$$

$$y^{-3} = x^3[\int x^{-3}.(-3x^3)dx + c] \Rightarrow$$

$$y^{-3} = x^3[\int -3dx + c] \Rightarrow$$

$$y^{-3} = x^3(-3x + c) \Rightarrow$$

$$y^{-3} = -3x^4 + cx^3$$

معادله ديفرانسيل **كلرو**(Clairaut)

معادله ديفرانسيل به صورت $y = xy' + f(y')$ به نام **كلرو** (Clairaut)معروف است. بسادگي ملاحظه مي‌شود

$$y = cx + f(c)$$

جوابي از معادله بالا مي باشد، با مشتق گيري داريم $y' = c$ كه با جايگذاري در جواب $y = xy' + f(y')$ نتيجه مي‌شود كه همان معادله كلرو است. بنابراين جواب معادله كلرو با جايگذاري $y' = c$ بدست مي آيد.

مثال : معادله $y = xy' + (y')^2$ را حل کنيد.

حل: با جايگذاري $y' = c$ معادله داراي جواب است.

$$\boxed{y = cx + c^2}$$

معادله ديفرانسيل ريکاتي

معادلـه ديفرانسيل ريکاتي مرتبـه اول **ريکاتي** (Riccati) بـه صورت $\boxed{y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2}$ مي باشد به شرط $h(x) \neq 0$

براي پيدا کردن جواب عمومي معادله بالا بايد جوابي خاص از آن معلوم باشد. اگر $y = y_1(x)$ يک جواب خاص از معادله بالا باشد. جايگذاري $y = y_1 + \frac{1}{u}$ $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ معادله را به معادله ديفرانسيل

$$\boxed{u' + [g(x) + 2h(x)y_1]u = -h(x)}$$

که مرتبه اول خطي است، تبديل مي کند.

مثال: معادله $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ (با $y_1 = -x^2$) را حل ميکنيم:

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = \frac{2}{x} \quad h(x) = \frac{-1}{x}$$

$$u' + [\frac{2}{x} + 2(-\frac{1}{x}).(-x^2)]u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' + (\frac{2}{x} + 2x)u = \frac{1}{x}$$

$$p(x) = \frac{2}{x} + 2x \qquad q(x) = \frac{1}{x}$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}[\int e^{2\ln x + x^2}\frac{1}{x}dx + c] \quad \Rightarrow$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}[\int e^{2\ln x + x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = e^{-2\ln x}e^{-x^2}[\int e^{2\ln x}.e^{x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}[\int x^2.e^{x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}[\int xe^{x^2}dx + c]$$

$$u = \frac{1}{2}x^{-2} + cx^{-2}e^{-x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2e^{x^2}} = \frac{e^{x^2} + 2c}{2x^2e^{x^2}}$$

$$y = -x + \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2c}$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $y' - 2xy = e^{x^2}$

2) $y' + xy = \frac{x}{y^3} \quad y \neq 0$

3) $y = y'x + (y')^2$

فصل دوم: معادلات ديفرانسيل

مرتبه دوم و بالاتر

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم

دراين فصل معادله مرتبه دوم $f(x,y,y',y'')=0$ را در حالات خاص بررسي مي کنيم.

معادله مرتبه دوم فاقد x: به صورت $f(y,y',y'')=0$ مي‌باشد. مثلا $yy''=(y')^2$ و $y''+y=0$

معادله مرتبه دوم فاقد y: به صورت $f(x,y',y'')=0$ مي‌باشد. مثلا $xy''=y'$ و $xy''-y'=3x^2$

حل معادله $f(x,y',y'')=0$

با تغيير متغير $y'=p$ مي توان معادله را به معادله مرتبه اول تبديل كرد كه اگر معادله بدست آمده يكي از معادلات مرتبه اول باشد كه قبلا بحث شده است مي توان آنرا حل كرد. زيرا:

$$y'=p \quad \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

$$f(x,y',y'')=0 \quad \Rightarrow f(x,p,\frac{dp}{dx})=0$$

كه معادله مرتبه اول مي باشد.

حل معادله $f(y,y',y'')=0$

با تغيير متغير $y'=p$ مي توان معادله را به معادله مرتبه اول تبديل كرد كه اگر معادله بدست آمده يكي از معادلات مرتبه اول باشد كه قبلا بحث شده است مي توان آنرا حل كرد. زيرا

$$y'=p \quad \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$f(y,y',y'')=0 \quad \Rightarrow f(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$$

معادله مرتبه اول با فرض y متغير مستقل و p متغير وابسته مي باشد.

مثال: مطلوبست جواب عمومي معادله ديفرانسيل زير؟

$$xy''=y'$$

$$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

$$x\frac{dp}{dx}=p \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln p=\ln x+\ln c_1 \Rightarrow \ln p=\ln c_1x \Rightarrow p=c_1x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1x \Rightarrow \int dy=\int c_1xdx \Rightarrow y=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2$$

مثال: مطلوبست جواب عمومي معادله ديفرانسيل زير؟

$$yy''=(y')^2$$

$$y'=p \quad \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2 \Rightarrow ydp=pdy$$

$$\Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p=\ln y+\ln c_1 \Rightarrow p=c_1y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=c_1y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int c_1dx \Rightarrow \ln y=c_1x+c_2$$

$$\Rightarrow y=e^{c_1x+c_2}=e^{c_1x}e^{c_2} \Rightarrow y=ce^{c_1x}$$

تذکر: درحل اين نوع معادلات ديفرانسيل مرتبه دوم، درواقع هر معادله مرتبه دوم را به دو معادله مرتبه اول تبديل كرده وآنها را حل مي كنيم.

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $y''+y=0$

2) $y''+y'=x$

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم خطي

بصورت كلي

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = f_4(x)$$

مي باشد كه اگر $f_4(x)=0$ آنرا مرتبه دوم خطي همگن ناميم و جواب آن را جواب عمومي معادله ناميده و با y_g نمايش مي‌دهيم. در حالتيكه $f_4(x)\neq 0$ جواب معادله فوق را جواب خصوصي ناميده و با y_p نمايش مي‌دهيم. جواب كلي معادله فوق مجموع اين دو جواب مي‌باشد يعني

$$\boxed{y = y_g + y_p}$$

اگر f_1، f_2 و f_3 توابع ثابت باشند بعبارت ديگر مقادير آنها اعداد ثابت باشند آن گاه معادله بصورت

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

مي باشد كه مي توان آنرا بصورت ساده

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

ملاحظه كرد كه آنرا مرتبه دوم خطي همگن با ضرايب ثابت ، يا اختصاراً با ضرايب ثابت ناميم . (مرحله شناخت)

حل معادله مرتبه دوم خطي همگن با ضرايب ثابت

با تعريف نماد $D = \frac{d}{dx}$ داريم

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy \quad , \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D^2y$$

با جايگذاري در معادله داريم:

$$y'' + ay' + by = 0 \;\Rightarrow\; (D^2 + aD + b)y = 0$$

معادله $(D^2 + aD + b = 0)$ را معادله كمكي (يا مفسر) ناميم كه يك معادله درجه دوم مي‌باشد. آن را حل مي كنيم سه حالت رخ مي‌دهد:

الف) معادله مفسر داراي دو ريشه حقيقي متمايز (m_1 و m_2) باشد آنگاه جواب عمومي معادله ديفرانسيل به صورت زير خواهد بود:

$$\boxed{y_g = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}}$$

ب) داراي ريشه حقيقي مضاعف (m) باشد آنگاه جواب عمومي معادله ديفرانسيل به صورت زير خواهد بود:

$$\boxed{y_g = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}}$$

ج) داراي دو ريشه مختلط متمايز به صورت ($m_1,m_2=a\pm ib$) باشد آنگاه جواب عمومي معادله ديفرانسيل به صورت زير خواهد بود:

$$\boxed{y_g = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)}$$

مثال: مطلوبست حل معادلات زير:

$$1)\; y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow$$
$$D^2 - 5D + 6 = 0 \Rightarrow D = 2,3 \Rightarrow y_g = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

$$2)\; y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow$$
$$D^2 - 4D + 4 = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow y_g = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

$$3)\; y'' - y' + y = 0 \Rightarrow$$
$$D^2 - D + 1 = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$$
$$y_g = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

تعريف: براي هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ رونسكين (Wronskian) توابع f و g را به صورت زير نمايش و تعريف مي‌كنيم.

$$w(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

ثابت مي شود كه رونسكين متحد با صفر است اگر وفقط اگر دو تابع وابسته خطي باشند. بعبارت ساده‌تر دو تابع، وابسته خطي‌اند هر گاه يكي مضرب ديگري باشد، درغير اين صورت آنها را مستقل خطي مي ناميم.

حل معادله ديفرانسيل مرتبه دوم خطي غير همگن

ملاحظه شد كه معادله مرتبه دوم خطي با ضرايب ثابت غير همگن بصورت $y'' + ay' + by = f(x)$ مي باشد كه براي حل آن همان طور كه گفتيم بايد جواب عمومي آن را در حالت همگن پيدا كرده سپس يك جواب خصوصي براي حالت غير همگن آن بدست آوريم جواب كلي معادله عبارتست از مجموع دو جواب عمومي و خصوصي: $\boxed{y = y_g + y_p}$

پس هدف از اين قسمت درس پيدا كردن جواب خصوصي معادله غير همگن $y'' + ay' + by = f(x)$:

روش تغيير پارامتر:

فرض كنيم جواب عمومي معادله همگن $y'' + ay' + by = 0$ **به صورت** $y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ **باشد**

آنگاه جواب خصوصي معادله $y'' + ay' + by = f(x)$ به صورت زير محاسبه مي‌شود:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_p = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 \\ \begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases} \\ v_1 = \int \dfrac{-y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx \quad , \quad v_2 = \int \dfrac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx \end{array}}$$

مطلوبست حل معادله زير:

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^x$$

$$\left\{ y'' - 5y' + 6y = 0 \right. \Rightarrow D^2 - 5D + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 2 \\ D_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{3x} = 0 \\ v_1'(2e^{2x}) + v_2'(3e^{3x}) = 3e^x \end{cases}$$

$$v_1 = 3e^{-x} \quad , \quad v_2 = \frac{-3}{2} e^{-2x}$$

$$y_p = 3e^{-x} . e^{2x} - \frac{3}{2} e^{-2x} . e^{3x} = 3e^x - \frac{3}{2} e^x = \frac{3}{2} e^x$$

$$\boxed{y = y_g + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2} e^x}$$

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$(D^2 - 3D + 2)y = e^x$$

$$(D - 1)(D - 2)y = e^x$$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \Rightarrow y_p = v_1 e^x + v_2 e^{2x}$$

$$\begin{cases} v_1' e^x + v_2' e^{2x} = 0 \\ v_1' e^x + 2v_2' e^{2x} = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -x \\ v_2 = -e^{-x} \end{cases}$$

$$y_p = -xe^x - e^{-x} e^{2x} = -(1 + x)e^x$$

$$y = y_p + y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - (1 + x)e^x$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير:

1) $y'' - 5y' + 6y = 1 + x$

2) $y'' - 5y' + 6y$

3) $y'' - y' - 6y = e^{-x}$

4) $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$

حل معادله مرتبه nام خطي همگن با ضرايب ثابت

معادله مفسر را كه در معادله مرتبه دوم داشتيم تعميم مي‌دهيم:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \Rightarrow$$

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0 \Rightarrow$$

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) = 0$$

$$\boxed{(D - m_1)(D - m_2)(D - m_3)\dots(D - m_n) = 0}$$

با توجه به ريشه‌هاي معادله مفسر، جواب عمومي برابر است با عبارت‌هاي زير:

حل معادله مرتبه nام خطي همگن با ضرايب ثابت

۱- به ازاي هر ريشه حقيقي مانند m_k يك عبارت به صورت

$\boxed{c_k e^{m_k x}}$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

۲- به ازاي هر ريشه حقيقي تكراري m_k از مرتبه r يك عبارت به صورت

$\boxed{c_1 e^{m_k x} + c_2 x e^{m_k x} + \dots + c_r x^{r-1} e^{m_k x}}$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

حل معادله مرتبه nام خطي همگن با ضرايب ثابت

۳- با ازاي هر جفت ريشه مختلط $a \pm ib$ يك عبارت به صورت

$\boxed{e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)}$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

۴- با ازاي هر جفت ريشه مختلط تكراري $a \pm ib$ از مرتبه rام يك عبارت به صورت

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + x e^{ax}(c_3 \cos bx + c_4 \sin bx) + \dots + \\ x^{r-1} e^{ax}(c_{2r-1} \cos bx + c_{2r} \sin bx) \end{array}}$$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$D(D-1)(D-2)^2 y = 0 \Rightarrow$$

$D = 0,1 \longrightarrow$ ريشه‌هاي حقيقي

$D = 2 \longrightarrow$ ريشه تكراري از مرتبه دوم

$$y_g = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $(D-1)(D-2)(D+2)^2 y = 0$

2) $(D-2)(D+1)(D+3)y = 0$

3) $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$

4) $(D-2)^2(D+2)y = 0$

5) $(D^2+9)^2(D^2-4)y = 0$

6) $(D^2 - 2D + 5)^2 y = 0$

حل معادله مرتبه nام خطي غير همگن با ضرايب ثابت

اين معادله به صورت زير مي‌باشد

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

روش تغيير پارامتر را مي توان براي اين معادلات نيز تعميم داد، يعني اگر:

$$y_g = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

جواب عمومي معادله همگن مربوطه باشد آن گاه با فرض

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

حل معادله مرتبه nام خطي غير همگن با ضرايب ثابت

و حل دستگاه n معادله n مجهولي زير مي‌توان جواب خاص معادله غير همگن را بدست آورد:

$$\begin{cases} v_1' u_1 + v_2' u_2 + \dots + v_n' u_n = 0 \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' + \dots + v_n' u_n' = 0 \\ \vdots \\ v_1' u_1^{(n-2)} + v_2' u_2^{(n-2)} + \dots + v_n' u_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' u_1^{(n-1)} + v_2' u_2^{(n-1)} + \dots + v_n' u_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

مثال: مطلوبست حل معادله زیر؟

$$(D^3+3D^2-4)y=xe^{-2x}$$
$$(D-1)(D+2)(D+1)y=xe^{-2x}$$
$$y_g=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x} \Rightarrow y_p=v_1e^x+v_2e^{-2x}+v_3e^{-x}$$
$$\begin{cases} v_1'e^x+v_2'e^{-2x}+v_3'e^{-x}=0 \\ v_1'e^x-2v_2'e^{-2x}-v_3'e^{-x}=0 \\ v_1'e^x+4v_2'e^{-2x}+v_3'e^{-x}=xe^{-2x} \end{cases}$$
$$y_p=?$$
$$y=y_p+y_g=?$$

معادله کشي-اويلر

معادلــــــه مرتبــــــه دوم همگن $x^2y''+axy'+by=0$ را که درآن a و b اعداد ثا بت اند معادله کشي-اويلر مي ناميم.

براي مثال معادلات ديفرانسيل زير معادله هاي کشي – اويلر مي باشند.

الف) $x^2y''+xy'-y=0$

ب) $x^2y''-4xy'+6y=0$

حل معادله کشي – اويلر

اين معادله را با تغيير متغير $x=e^t$ مي توان به معادله مرتبه دوم با ضرايب ثابت تبديل كرد زيرا :

$$x^2y''+axy'+by=0$$
$$(x=e^t \ , \ dx=e^t dt) \Rightarrow \frac{dt}{dx}=e^{-t} \ \ \& \ \ \frac{d^2t}{dx^2}=-e^{-t} \Rightarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l} D(D-1)y+aDy+b)y=0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\dfrac{dy}{dt}+by=0 \end{array}}$$

كه معادله حاصل يك معادله مرتبه دوم همگن با ضرايب خطي است.

مثال: مطلوبست حل معادله زير

$$x^2y''-4xy'+6y=0$$
$$\begin{cases} x=e^t \Rightarrow t=\ln x \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-5\dfrac{dy}{dt}+6y=0 \Rightarrow D^2-5D+6D=0 \Rightarrow \begin{cases} D=2 \\ D=3 \end{cases} \end{cases}$$
$$y_g=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}=c_1e^{2\ln x}+c_2e^{3\ln x}=c_1x^2+c_2x^3$$

تذكر: نتايج بالا را براي معادلات ديفرانسيل كشي – اويلر مرتبه بالا نيز مي توان تعميم داد. براي مثال براي معادله كشي – اويلر مرتبه سوم داريم:

$$x^3y'''+ax^2y''+bxy'+cy=0$$
$$[D(D-1)(D-2)+aD(D-1)+bD+c]y=0$$

مثال:

$$x^3y'''+4x^2y''-8xy'+8y=0$$
$$\begin{cases} x=e^t \Rightarrow t=\ln x \\ [D(D-1)(D-2)+4D(D-1)-8D+8]y=0 \Rightarrow D=1,2,-4 \end{cases}$$
$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{-4t}=c_1x+c_2x^2+c_3x^{-4}$$

تذكر: معادله كشي – اويلر غير همگن را نيز مي توان بعد از تغيير متغير مناسب تبديل به معادله با ضرايب غير همگن نمود وآنرا به روش تغيير پارامتر حل كرد.

تمرين: مطلوبست حل معادله زير؟

$$x^2y''+xy'-y=-2x^2e^x$$

روش ضرایب ثابت (ضرایب نامعین)

در معادله غیرهمگن $y''+ay'+by=f(x)$ ملاحظه شد، اگر $f(x)$ تابعي نمايي باشد آن گاه y_p نيز نمايي مي‌باشد. قبلا ديديم كه اگر

$$f(x)=3e^{x} \Rightarrow y_p=\frac{3}{2}e^{x}$$

از اين مطلب استفاده كرده وروشي را به نام روش ضرايب ثابت در حالات خاص $f(x)$ بيان مي كنيم.

۱) اگر $f(x)=Ae^{ax}$ تابع نمايي باشد در صورتي كه a ريشه معادله مفسر نباشد آنگاه y_p نيز بصورت تابع نمايي Be^{ax} است كه با مشتق‌گيري وجايگذاري درمعادله مقدار B بدست مي‌آيد.

۲) اگر $f(x)=Ae^{ax}$ تابع نمايي باشد در صورتي كه a ريشه معادله مفسر با تكرار مرتبه r ام باشد آنگاه y_p نيز بصورت تابع نمايي $Bx^{r}e^{ax}$ است كه با مشتق‌گيري وجايگذاري درمعادله مقدار B بدست مي‌آيد.

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$y''-4y'+4y=3e^{2x}$$
$$D^2-4D+4=0 \Rightarrow (D-2)^2=0 \Rightarrow D=2,2$$
$$y_g=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$
$$y_p=Bx^2e^{2x} \Rightarrow \begin{cases} y_p'=2Bxe^{2x}+2Bx^2e^{2x} \\ y_p''=2Be^{2x}+4Bxe^{2x}+4Bxe^{2x}+4Bx^2e^{2x} \end{cases}$$
$$2Be^{2x}+8Bxe^{2x}+4Bx^2e^{2x}-4(2Bxe^{2x}+2Bx^2e^{2x})$$
$$+4Bx^2e^{2x}=3e^{2x}$$
$$\Rightarrow 2Be^{2x}=3e^{2x} \Rightarrow B=\frac{3}{2} \Rightarrow y_p=\frac{3}{2}x^2e^{2x}$$
$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

۳) اگر $f(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n$ تابع چند جمله اي باشد آن گاه جواب خاص نيز تابعي چند جمله‌اي مي‌باشد. ولي درصورتي جواب همگن به صورت چند جمله‌اي است كه صفر ريشه معادله كمكي از مرتبه تكرار r باشد، آنگاه بايد جواب خاص را در x^r ضرب كنيم. يعني

$$y_p=x^{r}(B_0+B_1x+\ldots+B_nx^{n})$$

جواب خاص معادله غير همگن مي‌باشد.

مثال : مطلوبست حل معادله زير؟

حل :

$$y''-y'=1+x^2$$

$D^2-D=0 \Rightarrow (D=0,1) \rightarrow$ چون صفر يكبار ريشه معادله كمكي است پس

$$y_g=c_1e^{0\times x}+c_2e^{1\times x}=c_1+c_2e^{x}$$
$$y_p=x(B_0+B_1x+B_2x^2)$$
$$\begin{cases} 2B_1-5B_0=1 \\ 6B_2-2B_1=0 \Rightarrow B_2=-\frac{1}{3}, B_1=-1, B_0=\frac{-3}{5} \\ -3B_2=1 \end{cases}$$
$$y_p=-\frac{3}{5}x-x^2-\frac{1}{3}x^3$$
$$y=c_1+c_2e^{x}-\frac{3}{5}x-x^2-\frac{1}{3}x^3$$

۴) اگر $f(x)=A_1\sin\alpha x+A_2\cos\alpha x$ باشد جواب خاص معادله نيز بصورت مثلثاتي سينوس و كسينوس مي‌باشد و درصورتي كه $D=\pm i$ ريشه مختلط محض معادله مفسر از مرتبه jام باشد دراين حالت بايد جواب خصوصي را در x^j ضرب نمود. يعني:

$$y_p=x^{j}(B_1\sin\alpha x+B_2\cos\alpha x)$$

مثال : مطلوبست حل معادله زير؟

$y''-y=3\sin x$

حل:

$D^2-1=0 \Rightarrow D=\pm 1 \rightarrow$ چون a=0 ريشه مختلط محض معادله كمكي نيست

$y_g=c_1+c_2e^{x}$

$y_p=B_0\sin x+B_1\cos x$

$$\begin{cases} -B_0\sin x - B_1\cos x - B_0\sin x - B_1\cos x = 3\sin x \\ -2B_0=3 \Rightarrow B_0-\frac{3}{2},\ -2B_1=0 \Rightarrow B_1=0 \end{cases}$$

$y_p=-\frac{3}{2}\sin x$

$y=c_1x^{x}+c_2e^{-x}-\frac{3}{2}\sin x$

۵) درمعادله غير همگن، اگر

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)$$

باشد آنگاه به ازاي هر $i=1, 2, \dots, n$، هرگاه $y_i(x)$، يك جواب معادله غير همگن

$$y''+ay'+by=f_i(x)$$

باشد، آنگاه در كل، معادله غير همگن، جوابي بصورت

$$y_p=y_1(x)+y_2(x)+\dots+y_n(x)$$

دارد.

مثال: مطلوبست جواب خصوصي معادله زير؟

$y''-3y'+2y=2x^2+4e^{3x}$

$D^2-3D+2=0 \Rightarrow D=1,2$

چون α=0 و α=3 ريشه معادله مفسر نيستند پس

$$\begin{cases} y_p=B_0e^{3x}+B_1+B_2x+B_3x^2 \\ y'_p=3B_0e^{3x}+B_2+2B_3x \\ y''_p=9B_0e^{3x}+2B_3 \end{cases} \Rightarrow y_p=2e^{3x}+\frac{7}{2}+3x+x^2$$

فصل سوم: دستگاه معادلات ديفرانسيل

دستگاه معادلات ديفرانسيل

در اين فصل با توجه به كاربردهاي دستگاه معادلات ديفرانسيل در فيزيك و مكانيك و ديگر كاربردهاي آن به بررسي و مطالعه اين دستگاه ها مي پردازيم.

تعريف: مجموعه‌اي بيش از يك معادله ديفرانسيل همزمان را دستگاه معادلات ديفرانسيل ناميم.

ساده‌ترين دستگاه معادلات ديفرانسيل دستگاه دو معادله ديفرانسيل مي‌باشد كه عبارت است از:

$$\begin{cases} f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2},\dots,\frac{d^nx}{dt^n}\right)=0 \\ g\left(t,y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},\dots,\frac{d^my}{dt^m}\right)=0 \end{cases}$$

كه اين دستگاه قابل با اضافه تر شدن متغيرها قابل تعميم هست.

مثال‌هايي از انواع دستگاه معادلات ديفرانسيل:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2xt-x \\ \frac{dy}{dt}=2yt+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}+4y=1 \\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x \\ \frac{dy}{dt}=3x+2t \\ \frac{dz}{dt}=x+4y+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x+y \\ \frac{dy}{dt}=3y+x \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات ديفرانسيل

روش كلي براي حل دستگاه معادلات، روشي موسوم به روش **عملگر** يا **اپراتور** يا D مي باشد.

در اين روش فرض مي كنيم كه $\frac{d}{dt}=D$ ، آنگاه با جايگذاري عملگر دستگاه را به روش حذفي گوس حل مي كنيم. با يك مثال اين روش را توضيح مي دهيم .

مثال: مطلوبست حل دستگاه زير؟

$$\begin{cases}2\frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}+4y=1\\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=t-1\end{cases}\xrightarrow{\frac{d}{dt}=D}\begin{cases}2Dx-x+Dy+4y=1\\ Dx-Dy=t-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(2D-1)x+(D+4)y=1\\ Dx-Dy=t-1\end{cases}$$

با ضرب معادله اول در D ومعادله دوم در D+4 و جمع طرفين دستگاه داريم:

$$D(2D-1)x+(D+4)Dx=D(1)+(D+4)(t-1)$$

$$(2D^2-D+D^2+4D)x=0+D(t)+4t-D(1)-4$$

$$\boxed{(3D^2+3D)x=4t-3}$$

$$\boxed{(3D^2+3D)x=4t-3}$$

معادله بالا معادله ديفرانسيل خطي مرتبه دوم با ضرايب ثابت غيرهمگن مي‌باشد پس:

$$3D^2+3D=0\ \Rightarrow\ 3D(D+1)=0\ \Rightarrow\ D=0,-1$$

$$\begin{cases}x_g=c_1+c_2e^{-t}\\ x_p=t(A_\circ t+A_1)\end{cases}$$

$$x_p=A_\circ t^2+A_1t\quad\Rightarrow\quad x_p'=2A_\circ t+A_1\quad\Rightarrow\quad x_p''=2A_\circ$$

$$3x_p''+3x_p'=4t-3$$

$$6A_\circ+6A_\circ t+3A_1=4t-3\quad\Rightarrow\ A_\circ=\frac{2}{3}\quad,\quad A_1=-\frac{7}{3}$$

$$x_p=\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t$$

$$x=c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t$$

$$\frac{dx}{dD}-\frac{dy}{dt}=t-1\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}-t+1\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt}=-c_2e^{-t}+\frac{4}{3}t-\frac{7}{3}-t+1\ \Rightarrow\frac{dy}{dt}=-c_2e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\int dy=\int(-c_2e^{-t}+\frac{1}{3}t-\frac{4}{3})dt\ \Rightarrow\ y=c_2e^{-t}+\frac{1}{6}t^2-\frac{4}{3}t+c_3\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t\\ y=c_2e^{-t}+\frac{1}{6}t^2-\frac{4}{3}t+c_3\end{cases}$$

تذكر: بعد از جايگذاري عملگر D براي حل دستگاه دو معادله ديفرانسيل مي‌توان به جاي روش حذفي يا روش گوس از روابط زير استفاده نمود

$$\begin{cases}f_1(D)x+g_1(D)y=h_1(t)\\ f_2(D)x+g_2(D)y=h_2(t)\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}h_1(t)&g_1(D)\\h_2(t)&g_2(D)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_1(D)&g_1(D)\\f_2(D)&g_2(D)\end{vmatrix}}\quad,y=\frac{\begin{vmatrix}h_1(t)&f_1(D)\\h_2(t)&f_2(D)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_1(D)&g_1(D)\\f_2(D)&g_2(D)\end{vmatrix}}$$

روش بيان شده يك روش كلي براي حل دستگاه معادلات ديفرانسيل مي باشد ولي هميشه نياز به استفاده از اين روش نيست و مي‌توان همانند حل دستگاه معادلات در رياضيات عمومي، از روش هاي ابتكاري مختلف همانند جمع چند معادله براي حذف پارمترها يا با جايگذاري و ...استفاده نمود براي اين منظور چند مثال ارائه مي‌گردد.

مثال: مطلوبست حل دستگاه زير؟

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xt - x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2yt + x \end{cases}$$

چنانكه ملاحظه مي شود معادله اول معادله جداشدني است

$$\frac{dx}{dt} = x(2t-1) \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int (2t-1)dt$$

$$\Rightarrow \ln x = t^2 - t + c \Rightarrow x = e^{t^2-t+c} = e^{t^2-t} \cdot e^c \Rightarrow x = c_1 e^{t^2-t}$$

$$\xrightarrow{EQ:2} \frac{dy}{dt} = 2yt + c_1 e^{t^2-t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} - 2ty = c_1 e^{t^2-t}$$

و اين معادله نيز معادله مرتبه اول خطي است پس:

$$y = e^{-\int -2t dt}\left[\int e^{\int -2t dt} \cdot c_1 e^{t^2-t} dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1 \int e^{-t^2} \cdot e^{t^2-t} dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1 \int e^{-t} dt + c_2\right] \Rightarrow y = e^{t^2}\left[-c_1 e^{-t} + c_2\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{t^2-t} \\ y = -c_1 e^{t^2-t} + c_2 e^{t^2} \end{cases}$$

مثال: مطلوبست حل دستگاه زير:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + x \end{cases}$$

دستگاه دو معادله مرتبه اول خطي با ضرايب ثابت مي‌باشد با مشتق گيري از معادلات دستگاه و استفاده از معادله دوم دستگاه آنرا به معادله مرتبه دوم خطي با ضرايب ثابت تبديل مي كنيم كه با حل آن قبلاً آشنا شده ايم .

$$\xrightarrow{\text{dif from EQ1}} \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \xrightarrow{\text{from EQ2}} \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3y + x \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{from EQ1}} \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3(\frac{dx}{dt} - 3x) + x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0 \Rightarrow$$

$$x'' - 6x' + 8x = 0 \Rightarrow D^2 - 6D + 8 = 0 \Rightarrow D = 2,4$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

$$y = \frac{dx}{dt} - 3x = 2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} - 3c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{4t}$$

$$y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{cases}$$

تذكر: همانطوري كه در دستگاه معمولي ممكن است دستگاه داراي جواب منحصر بفرد و يا بي نهايت جواب و يا جواب نداشته باشند در دستگاه معادلات ديفرانسيل نيز چنين مي‌باشد. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ 4Dx_1 - 4Dx_2 = 4t \end{cases}$$

داراي بي نهايت جواب مي باشد.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{2} + c \\ x_2 = 5c \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{2} + c_1 \\ x_2 = \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{2} + c_2 \end{cases} \quad \& \ldots$$

تمرين: مطلوبست حل دستگاه معادلات ديفرانسيل زير؟

$$1)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2t \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 4y + t \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x - 6 = e^t \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + x + y = t \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \\ \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

تمرین: دو مخزن هرکدام حاوي ۱۰۰ گالن از يك محلول شیمیایي است. در مخزن اول ۲۰ کیلوگرم و در مخزن دوم ۱۰ کیلوگرم از این ماده شیمیایي موجود است. در لحظه t=0 آب با آهنگ ۲ گالن در دقیقه به مخزن اول وارد مي‌شود و پس از مخلوط شدن با ماده شیمیایي، با آهنگ ۲ گالن در دقیقه به مخزن دوم وارد شده، در آنجا هم پس از مخلوط شدن با همان آهنگ خارج مي‌شود، مطلوبست مقدار ماده شیمیایي در هر مخزن در لحظه t؟

فصل چهارم: تبدیلات لاپلاس

در این فصل ملاحظه خواهیم کرد چگونه با به کار بردن تبدیل لاپلاس در مورد يك معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه، مي‌توان آن را به مسئله ساده‌تري تبدیل کرده بطوري که با وارون تبدیل لاپلاس جواب مسئله ابتدائي بدست مي‌آید و همچنین ملاحظه خواهد شد که روش‌هاي تغییر پارامتر و ضرایب ثابت را در مورد حل معادلات دیفرانسیل غیرهمگن که تابع طرف دوم ناپیوسته باشد نمي توان بکار برد که در این حالت مي‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد.

تبدیل لاپلاس

تبدیل مفهوم تعمیم یافته تابع مي باشد، یعني رابطه اي که به هر تابع ، تابع دیگري را نسبت دهد، يك تبدیل نامیم. از جمله تبدیلات مشهور تبدیل مشتق و انتگرال که معمولاً با نماد زیر بترتیب نشان مي دهیم.

$$1)\ D(f(x)) = F'(x)$$

$$2)\ \int f(x)dx = F(x)+c$$

فرض کنیم تابع f برباز $[0, \infty)$ تعریف شده باشد تبدیل لاپلاس f را به صورت زیر تعریف و نمایش داده مي‌شود:

$$\boxed{\forall s \in R : \mathrm{L}\left[f(x)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx}$$

مثال: مطلوبست تبدیل لاپلاس تابع زیر؟

$$f(x) = 1$$

$$L(1) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}e^{\circ}\right) = \frac{1}{s} \quad \forall s > 0$$

$$f(x) = x$$

$$L(x) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\cdot x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-sx}dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}\Big|_0^b + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-sx}dx\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx} - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}be^{-sb} - \frac{1}{s^2}e^{-sb} + \frac{1}{s}xe + \frac{1}{s^2}e^{\circ}\right] = \frac{1}{s^2} \quad \forall s > 0$$

$$f(x) = x^n$$

$$L(x^n) = \int_0^\infty e^{-sx}\cdot x^n dx = -\frac{x^n e^{-sx}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x^{n-1}dx$$

$$= \frac{n}{s}L(x^{n-1}) = \frac{n}{s}\left(\frac{n-1}{s}\right)L(x^{n-2}) = \cdots = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}L(1) \Rightarrow$$

$$L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall s > 0$$

خواص تبدیل لاپلاس

از این خواص می توان بسیاری از تبدیل لاپلاس توابع را پیدا کرد که هر کدام با مثالی ارائه میگردد.

$$1)\ L\left[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\dots\right]=c_1 L\left[f_1(x)\right]+c_2 L\left[f_2(x)\right]+\dots$$

$$L\left[\cosh 3x-2\sin 4x-e^{2x}\right]=L\left[\cosh 3x\right]-2L\left[\sin 4x\right]-L\left[e^{2x}\right]=\dots$$

$$2)\ L\left[e^{ax} f_1(x)\right]=F(s-a)$$

$$L\left[e^{bx}\cos ax\right]=\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}\ ,\ L(e^{-2x}x^5)=\frac{5!}{(s+2)^6}$$

$$3)\ L(x^n f(x))=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L(f(x))$$

$$L(x\sin x)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=-\frac{-2s}{(s^2+1)^2}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L(x^2\sin x)=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L(f(x))=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

تبدیل لاپلاس انواع توابع مهم:

$L(x^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$L(e^{ax})=\frac{1}{s-a}$
$L(\sin ax)=\frac{a}{a^2+s^2}$	$L(\sinh ax)=\frac{a}{s^2-a^2}$
$L(\cos ax)=\frac{s}{s^2+a^2}$	$L(\cosh ax)=\frac{s}{s^2-a^2}$
$L(\frac{\sin kt}{t})=tg^{-1}(\frac{k}{s})$	$L(\frac{2\sinh kt}{t})=\ln(\frac{s+k}{s-k})$
$L(\frac{1-e^{-t}}{t})=\ln(1+\frac{1}{s})$	

$$4)\ L\left[f(ax)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L\left(\frac{1-e^{-at}}{at}\right)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)=\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{1}{s/a}\right)=\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{a}{s}\right)$$

$$5)\ L(y^{(n)})=s^nL(y)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\cdots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)$$

$$L(y')=sL(y)-y(0)$$

$$L(y'')=s^2L(y)-sy(0)-y'(0)$$

$L(\sin^2 x)$:

$$f(x)=\sin^2 x\ \Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$L\left[f'(x)\right]=sL(\sin^2 x)-\sin^2(0)\Rightarrow\frac{2}{s^2+4}=sL(\sin^2 x)\Rightarrow$$

$$L(\sin^2 x)=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

تمرین: مطلوبست تبدیل لاپلاس توابع زیر؟

$1)L(5x^2+12)$ $2)L(3e^{2x}+3x)$ $3)L(e^{i\alpha x})$

$4)L(\sin\alpha x)$ $5)L(\cos\alpha x)$ $6)L(\sinh x)$

$7)L(\cosh\alpha x)$ $8)L(e^{7x}\sin 5x)$ $9)L(e^{3x}\cos 4x)$

$10)L(e^{-2x}x^5)$ $11)L(x\cos x)$

$$1)L(5x^2+12)=5L(x^2)+12L(1)=5\times\frac{2!}{s^3}+12\times\frac{1}{s}=\frac{10}{s^3}+\frac{12}{s}$$

$$2)L(3e^{2x}+3x)=3L(e^{2x})+3L(x)=3\times\frac{1}{s-2}+3\times\frac{1}{s^2}=\frac{3}{s-2}+\frac{3}{s^2}$$

$$3,4,5)L(e^{i\alpha x})=\frac{1}{s-i\alpha}=\frac{1}{s-i\alpha}\times\frac{s+i\alpha}{s+i\alpha}=\frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2}=\frac{s}{s^2+\alpha^2}+i\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$L(e^{i\alpha x})=L(\cos\alpha x+i\sin\alpha x)=L(\cos\alpha x)+iL(\sin\alpha x)$$

$$L(\sin\alpha x)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\ ,\ L(\cos\alpha x)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$6)L(\sinh x)=L\left(\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[L(e^{\alpha x})-L(e^{-\alpha x})\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha}-\frac{1}{s+\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s+\alpha-s+\alpha}{s^2-\alpha^2}\right)=\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

$$7)L(\cosh\alpha x)=L\left(\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2}\right)=(L(e^{\alpha})+L(e^{-\alpha x}))=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{s+\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s+\alpha+s-\alpha}{s^2-\alpha^2}\right)=\frac{s}{s^2-\alpha^2}$$

$$8)L(e^{7x}\sin 5x)=\frac{5}{(s-7)^2+25}\qquad 9)L(e^{3x}\cos 4x)=\frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

$$10)L(e^{-2x}x^5)=\frac{5!}{(s+2)^6}$$

$$11)L(x\cos x)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=-\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

معكوس تبديل لاپلاس

فرض كنيم تبديل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در اين صورت واضح است كه تابع منحصر بفردي مانند F(s) وجود دارد كه $F(s)= L[f(x)]$

اينك عكس اين حالت را در نظر مي گيريم. فرض كنيد تابعي مانند F(s) داده شده باشد. آيا تابع منحصر بفردي مانند $f(x)$ به گونه اي وجود دارد كه داشته باشيم : $F(s)= L[f(x)]$

اگر پاسخ سؤال مثبت باشد مي نويسيم:

$$f(x)=L^{-1}(F(s))$$

$f(x)$ را وارون يا معكوس تبديل لاپلاس تابع F(s) ناميم.

خواص معكوس تبديل لاپلاس

$$\boxed{1)L^{-1}(c_1F_1(s)+c_2F_2(s)+...)=c_1L^{-1}(F_1(s))+c_2L^{-1}(F_2(s))+...}$$

$$L^{-1}(\frac{5}{s})=5L^{-1}(\frac{1}{s})=5\times 1=5$$

$$L^{-1}(\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^2+4})=2L^{-1}(\frac{2!}{s^3})+3L^{-1}(\frac{2}{s^2+4})=2x^2 3\sin 2x$$

$$L^{-1}(\frac{2}{s+3})=?\quad L^{-1}(\frac{1}{s^2+s})=?\quad L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2})=?$$

$$\boxed{2)L^{-1}(F(s-a))=e^{ax}f(x)}$$

$$L^{-1}(\frac{1}{s^2+4s+5})=L^{-1}(\frac{1}{(s-2)^2+1^2})=e^{2x}\cdot\sin x$$

$$L^{-1}(\frac{6}{(s+2)+9})=?\quad L^{-1}(\frac{12}{(s+3)^4})=?\quad L^{-1}(\frac{s+3}{s^2+2s+5})=?$$

تمرين: مطلوبست معكوس تبديل لاپلاس توابع زير:

$$1)L^{-1}(\frac{2}{s+3})\qquad 2)L^{-1}(\frac{1}{s^2+s})$$

$$3)L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2})\qquad 4)L^{-1}(\frac{6}{(s+2)+9})$$

$$5)L^{-1}(\frac{12}{(s+3)^4})\qquad 6)L^{-1}(\frac{s+3}{s^2+2s+5})$$

$$\boxed{1)L^{-1}(\frac{2}{s+3})=2L^{-1}(\frac{1}{s-(-3)})=2e^{-3x}}$$

$$\boxed{2)L^{-1}(\frac{1}{s^2+s})=L^{-1}(\frac{1}{s(s+1)})=L^{-1}(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1})=L^{-1}(\frac{1}{s})-L^{-1}(\frac{1}{s-(-1)})=1-e^{-x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}3)L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2})&=L^{-1}(\frac{1}{s^2(s^2+1)})=L^{-1}(\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s^2+1})=L^{-1}(\frac{1}{s^2})-L^{-1}(\frac{1}{s^2+1})\\&=x-\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{4)L^{-1}(\frac{6}{(s+2)+9})=2L^{-1}(\frac{3}{(s+2)^2+3^2})=2e^{-2x}\cdot\sin 3x}$$

$$\boxed{5)L^{-1}(\frac{12}{(s+3)^4})=2L^{-1}(\frac{3!}{(s+3)^4})=2e^{-3x}\cdot x^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}6)L^{-1}(\frac{s+3}{s^2+2s+5})&=L^{-1}(\frac{s+1+2}{(s-1)^2+2^2})=L^{-1}(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2})+L^{-1}(\frac{2}{(s+1)^2+2^2})=\\&=e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x\end{aligned}}$$

حل معادله ديفرانسيل به روش لاپلاس

اينك آماده هستيم نشان دهيم كه چگونه مي توان جواب يك مسئله با مقدار اوليه دشوار را به كمك تبديلات لاپلاس، به مسئله ديگري با شرايط سادەتر تبديل كرده و سپس با استفاده از وارون تبديل لاپلاس جواب معادله ديفرانسيل را بدست آورد. روش كار را با چند مثال در مورد حل معادلات ديفرانسيل توضيح مي دهيم.

مثال :مطلوبست حل معادله زير؟

$$y'+y=e^x\quad y(0)=1$$

$$L(y'+y)=L(e^x)\Rightarrow L(y')+L(y)=L(e^x)\Rightarrow$$

$$sL(y)-y(0)+L(y)=L(e^x)\Rightarrow sL(y)-1+L(y)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow$$

$$(s+1)L(y)=\frac{1}{s-1}+1=\frac{1+s-1}{s-1}=\frac{s}{s-1}\Rightarrow L(y)=\frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}(\frac{s}{(s-1)(s+1)})=L^{-1}(\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+1})\Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}L^{-1}(\frac{1}{s-1})+\frac{1}{2}L^{-1}(\frac{1}{s+1})\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}=\cosh x$$

مثال :مطلوبست حل معادله زير؟

$$y''+4y=4x \quad y(0)=1, y'(0)=5$$

$$L(y''+4y)=L(4x) \Rightarrow L(y'')+4L(y)=4L(x) \Rightarrow$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+4L(y)=\frac{4}{s^2}\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-s-5+4L(y)=\frac{4}{s^2}\Rightarrow (s^2+4)L(y)=s+5+\frac{4}{s^2}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{5}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}\right)=\cos 2x+2\sin 2x+x$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $y'+2y=e^{-x} \quad y(0)=2$

2) $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x \quad y(0)=0, y'(0)=3$

3) $y''+2y'+y=3xe^{-x} \quad y(0)=4, y'(0)=2$

1) $y'+2y=e^{-x} \quad y(0)=2$

$$L(y'+2y)=L(e^{-x})\Rightarrow L(y')+2L(y)=L(e^{-x})\Rightarrow$$

$$sL(y)-y(0)+2L(y)=L(e^{-x})\Rightarrow (s+2)L(y)=\frac{1}{s+1}+2=\frac{2s+3}{s+1}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right)\Rightarrow$$

$$y=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right)\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)\Rightarrow y=e^{-x}+e^{-2x}$$

2) $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x \quad y(0)=0, y'(0)=3$

$$L(y''+2y'+5y)=L(3e^{-x}\sin x)\Rightarrow$$

$$L(y'')+2L(y')+5L(y)=3L(e^{-x}\sin x)\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+2\left[sL(y)-y(0)\right]+5L(y)$$

$$=\frac{3}{(1+s)^2+1}\Rightarrow$$

$$(s^2+2s+5)L(y)-3=\frac{3}{(1+s)^2+1}\Rightarrow$$

$$L(y)=\frac{3(s^2+2s+3)}{((1+s)^2+1)+((1+s)^2+4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{1}{((1+s)^2+1)}+\frac{2}{((1+s)^2+4)}=e^{-x}\sin x+2e^{-x}\sin 2x$$

3) $y''+2y'+y=3xe^{-x} \quad y(0)=4, y'(0)=2$

$$L(y''+2y'+5y)=L(3xe^{-x})\Rightarrow L(y'')+2L(y')+5L(y)$$

$$=3L(e^{-x}\sin x)\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+2\left[sL(y)-y(0)\right]+L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-4s-2+2sL(y)-8+L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}\Rightarrow$$

$$(1+2s+1)L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}+4s+10\Rightarrow (1+s)^2L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}+4s+10$$

$$L(y)=\frac{3}{(1+s)^4}+\frac{4s+10}{(1+s)^2}=\frac{3}{(1+s)^4}+\frac{4(1+s)+6}{(1+s)^2}$$

$$=\frac{3}{(1+s)^4}+\frac{4}{(1+s)}+\frac{6}{(1+s)^2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3e^{-x}+6xe^{-x}+4e^{-x}$$

قضيه: اگر $F(s)=L[f(x)]$ و $G(s)=L[g(x)]$ و هر دو به ازاي $s>0$ موجود باشد آنگاه

$$H(x)=F(s)G(s)=L[h(x)]$$

كه در آن $\longleftarrow$ $h(x)=\int_0^x f(x-u)g(u)du$

تابع h به **كنولوسيون توابع** f و g معروف است و آن را با $h=f*g$ نشان مي دهيم.

ميتوان نشان داد:

$$h=f*g=g*f$$

مثال: با بکار بردن کنولوسیون تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا مي‌کنیم؟

$$H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\quad G(s)=\frac{a}{s^2+a^2}\Rightarrow H=F\times G$$

$$L(x)=\frac{1}{s^2},L(\sin ax)=\frac{a}{s^2+a^2}\Rightarrow$$

$$h(x)=f*g(x)=\int_0^x(x-u)\sin au\,du\Rightarrow$$

$$h(x)=\frac{ax-\sin ax}{a^2}$$

تابع گاما: این تابع را به صورت زیر تعریف و نمایش مي‌دهیم:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

که انتگرال فوق به ازاء $n>0$ همگراست.
این تابع داراي خواص زیر مي‌باشد:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) & \Gamma(n+1)=n!\,;n=0,1,2,\dots\\ \Gamma(1)=1 & \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\\ L(t^n)=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} & \end{array}}$$

مثال: مطلوبست تبدیل لاپلاس زیر؟

$$L(t^{1/2})=\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(1/2)}{s^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}=\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

تمرین: مطلوبست تبدیل لاپلاس زیر؟

$$L(t^4-2t^{3/2}+6)??$$

فصل پنجم: حل معادله دیفرانسیل به روش سري‌ها

حل معادله دیفرانسیل به روش هاي سریها

درفصل قبل با حل معادلات دیفرانسیل خطي مرتبه دوم با ضرایب ثابت، درچند حالت خاص با ضرایب متغیر آشنا شدیم. دراین فصل با یکي از موثرترین روش حل براي معادلات دیفرانسیل خطي مرتبه دوم (وبالاتر)، یعني، از سریهاي تواني استفاده مي کنیم. دردرس ریاضیات عمومي با مفهوم سري آشنا شده ایم . براي اینکه مطالب این فصل رابهتر درک کنیم، بحث را با مرور مختصري برسریهاي تواني شروع مي کنیم.

سري تواني

سري به صورت

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots$$

یا $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ که درآن $x_0,a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ اعداد ثابتي بوده و x متغیر است را سري تواني به مرکز x_0 نامیم.

سري تواني ممكن است كه دريكي از سه حالت زير صدق كند:

۱- تنها به ازاي $x = x_0$ همگرا باشد.

۲- به ازاي هر x دريك همسايگي x_0 مطلقا همگرا باشد، يعني براي $|x - x_0| < R$ همگرا وبراي $|x - x_0| > R$ واگر باشد عدد R را شعاع همگرايي سري ناميم.

۳- به ازاي هر x مطلقا همگرا باشد.

مجموعه مقادير x را كه سري تواني همگرا است، بازه (فاصله)همگرايي سري مي ناميم.

تذكر: اگر سري به ازاي $x = x_0 \pm R$ همگرا باشد آنگاه بازه همگرايي برابر است با

$$x_0 - R \le x \le x_0 + R$$

دردرس رياضي عمومي با پيدا كردن بازه همگرايي سري تواني آشنا شده ايم كه شعاع همگرايي عبارت است از

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ممكن است $R = \infty$ آنگاه حد بالا نامتناهي باشد.

مثال:بازه همگرايي سري تواني $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ را پيدا كنيد .

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

بنابراين ، سري تنها به ازاي $x = 0$ همگرا است.

مثال :بازه همگرايي سري تواني $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$ را پيدا كنيد.

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = +\infty$$

پس سري روي مجموعه اعداد حقيقي، يعني در همه جا همگرا است .

مثال :بازه همگرايي سري تواني $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x-2)^n$ را پيدا كنيد.

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right| = 1$$

پس، سري روي مجموعه x هايي كه $|x-2| < 1$ همگرا است .

قضيه : اگر سري تواني بربازه $|x - x_0| < R$ كه درآن R يك عدد ثابت مثبت است همگرا باشد، آنگاه سري تواني تابعي مانند $f(x)$ را تعريف مي كند كه به ازاي هر x دربازه پيوسته است.

تذكر:به طور طبيعي اين سوال مطرح مي شود كه به كدام تابع پيوسته همگرا است.

پاسخ دادن به اين سوال درحالت كلي آسان نيست.

قضيه : اگر $f(x)$ به صورت زير توسط يك سري تواني تعريف شده باشد،

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad |x-x_0|<R$$

آنگاه مي توان از سري بالا جمله به جمله مشتق گيري كرد

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

و همين طور انتگرال گرفت يعني:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad a,b\in(x_0-R,x_0+R)$$ كه

قضيه : فرض كنيم :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

آن گاه

الف) به ازاي هر عدد حقيقي c داريم:

$$cf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ca_n(x-x_0)^n$$

ب) $$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

ج) $$f(x).g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

كه درآن:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_Kb_{n-K}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$$

تذكر : با انتقال انديس مي توان نشان داد كه :

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(x-x_0)^n$$

بعبارت ديگر، با كم كردن k واحد از انديس جمع سري واضافه كردن k واحد به همه n هاي داخل علامت $\sum$ سري، دو سري مساوي به دست مي آيد.

تذكر: ١٢،١،٣- دركار كردن با سريهاي تواني با مركزبسط x_0 مخالف با صفر، غالبا به كار بردن تغيير متغير $z=x-x_0$ مفيد است. يعني :

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

قضيه: فرض كنيم سري $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

براي $|x-x_0|<R$ با $R>0$ همگرا به تابع $f(x)$ باشد، بسادگي نشان داده مي شود كه

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

ودرحالت خاص اگر $x_0=0$ آنگاه

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \; , \; n=0,1,2,\ldots$$

تعريف: سري را

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

بسط سري تيلر $f(x)$ ، حول نقطه x_0 وسري را

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

بسط ماك لورن $f(x)$ حول نقطه صفر مي ناميم.

تعريف: اگر سري

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

به ازاي هر x دربازه (x_0-R,x_0+R) به $f(x)$ همگرا باشد مي گوييم f درنقطه x_0 تحليلي است.

مثال : بسط سري ماك لورن برخي توابع عبارت است از:

الف) $e^x = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ كه $|x| < \infty$

ب) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ كه $|x| < \infty$

ج) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ كه $|x| < \infty$

د) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ كه $|x| < 1$

ه) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ كه $|x| < \infty$

و) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ كه $|x| < \infty$

نقاط معمولي ومنفرد

تعريف: نقطه x_0 را يك نقطه معمولي (عادي) براي معادله ديفرانسيل خطي مرتبه n ام

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + f_1(x) y' + f_0(x) y = g(x)$$

مي گويم هرگاه ضرايب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحليلي باشند.
نقطه اي را كه معمولي نباشد نقطه منفرد (غير عادي)معادله مي ناميم.

مثال : نقاط منفرد معادله ديفرانسيل

$$x^3(x^2-1)y'' + x(x+1)y' + (x-1)y = 0$$

را پيدا كنيد.
حل: معادله را با تقسيم بر $x^3(x^2-1)$ بصورت ضريب مشتق بالا ترين برابر يك مي كنيم يعني:

$$y'' + \frac{1}{x^2(x-1)} y' + \frac{1}{x^3(x+1)} y = 0$$

بديهي است كه همه ضرايب اين معادله در همه نقاط به جز نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ تحليلي مي باشند. پس آنها نقاط منفرد و همه نقاط ديگر نقاط معمولي معادله هستند.

قضيه: اگر هريك از توابع $g, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0$
درنقطه x_0 تحليلي باشند، آن گاه يك جواب منحصر به فرد مانند $y(x)$ وجود دارد كه در x_0 تحليلي است ودر n شرط اوليه

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

صدق مي كند. يعني هر جواب معادله ديفرانسيل توسط سري تيلر خود درنقطه x_0 دربازه I بيان مي شود .

جواب هاي سري معادلات ديفرانسيل (دريك نقطه معمولي)

مثال : معادله ديفرانسيل مرتبه اول $y' = y$ را با پيدا كردن جواب بصورت سري مك لورن حل مي كنيم.
حل: فرض

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

كه $R > 0, |x| < R$

چون $y' = y$ پس بايد : $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \\ 2a_2 = a_1 \\ 3a_3 = a_2 \\ 4a_4 = a_3 \\ \vdots \\ (n+1)a_{n+1} = a_n \\ \vdots \end{cases}$$

وبا حل كردن دستگاه از بالا به پايين نتيجه مي شود كه:

$$a_1 = a_0, a_2 = \frac{a_0}{2!}, a_3 = \frac{a_0}{3!}, \dots, a_n = \frac{a_0}{n!}, \dots$$

ويارابطه بازگشتي $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

كه به دست مي آوريم، $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$

حال با جايگذاري ضرايب بالا در $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

داريم :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

كه a_0 پارامتر مي باشد دقت كنيم كه جواب بالا همان جوابي است كه از روش هاي قبلي بدست مي آيد يعني $y = a_0 e^x$ جواب معادله جداشدني بالا است.

مثال : بسط تيلر جواب هاي معادله

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$$

را درنقطه معمولي $x = 1$ پيدا كنيد.

حل: براي سادگي از تغيير متغير $t = x-1$ استفاده مي كنيم دراين صورت متناظر $x = 1$ با $t = 0$ مي باشد وداريم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

بنابراين با جايگذاري ، معادله ديفرانسيل تبديل به معادله

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t^2\frac{dy}{dt} - 4ty = 0$$

مي شود چون همه ضرايب چند جمله اي هستند

، پس بازه همگرايي سريهاي جواب معادله برابر با $-\infty < t < +\infty$ است، بازه همگرايي سريهاي جواب معادله اصلي نيز برابر با $-\infty < x < +\infty$ است . سري تواني جواب را بصورت سري ماك لورن

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

درنظر مي گيريم . پس:

$$\frac{dy}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n t^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

با قرار دادن سريهاي بالا درمعادله ديفرانسيل ثانويه داريم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 3\times 2a_3 - 4a_0 = 0 \\ 4\times 3a_4 + a_1 - 4a_1 = 0 \\ 5\times 4a_5 + 2a_2 - 4a_2 = 0 \\ 6\times 5a_6 + 3a_3 - 4a_3 = 0 \\ 7\times 6a_7 + 4a_4 - 4a_4 = 0 \\ \vdots \\ n(n-1)a_n + (n-3)a_{n-3} - 4a_{n-3} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

درنتيجه:

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = \frac{3a_1}{4\times 3} \quad , \quad a_3 = \frac{4a_0}{3\times 2}$$

$$a_5 = 0 \quad , \quad a_7 = 0 \quad , \quad a_6 = \frac{4a_0}{6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_8 = 0 \quad , \quad a_{10} = 0 \quad , \quad a_9 = \frac{2\times 4a_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{12} = \frac{5\times 4\times 2a_0}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

چنانكه ملاحظه مي شود همه ستون هاي سوم وستون دوم بغير اولين جمله بقيه صفراند تنها ستون اول ناصفرمي باشدوبرحسب a_0 است بنابراين:

$$a_3 = \frac{-(3n-3-4)}{3n(3n-1)} a_{3n-3} = \frac{-(3n-7)}{3n(3n-1)} a_{3n-3}$$

$$a_{3n} = \frac{(3n-7)(3n-10)\ldots\times 8\times 5\times 2\times(-1)^n \alpha 4}{3n(3n-3)\ldots(3)\times(3n-1)(3n-4)\ldots\times 2} a_0$$

$$a_{3n} = \frac{2\times 5\times 8\times\ldots\times(3n-10)(3n-7)\times(-1)^n\times 4}{3^n(n(n-1)(n-2)\ldots\times(2\times 1)2\times 5\times\ldots\times(3n-4)\times(3n-1)}$$

$$a_{3n} = \frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!\times(3n-4)(3n-1)}$$

$$y = a_0 + a_1 t + 0t^2 + \frac{4}{3\times 2}a_0 t^3 + \frac{3}{4\times 3}a_1 t^4 + 0t^5 + \frac{4}{6\times 5\times 3\times 2}a_0 t^6$$
$$+0t^7 + 0t^8 + \frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}a_0 t^9 + 0t^{10} + 0t^{11} +$$
$$\frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}a_0 t^{11} + \ldots$$

$$y = a_1(t + \frac{1}{4}t^4) + a_0(1 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{6\times 5\times 3\times 2}t^6 +$$
$$\frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}t^9 + \frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}t^{12} + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^n.4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}t^{3n} + \ldots$$

ويا $y = a_1(t + \frac{1}{4}t^4) + a_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}t^{3n})$

با قرار دادن $t = x-1$ داريم :

$$y(x) = a_1((x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4) + a_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}(x-1)^{3n})$$

جواب عمومي معادله ديفرانسيل داده شده به ازاي هر x مي باشد.

تذکر: ممکن است رابطه بازگشتي بر حسب جمله عمومي امکان پذير نباشد يا بسادگي نتوان پيدا کرد در چنين حالتي جمله عمومي را معمولا"پيدا نمي کنيم.

معادله ديفرانسيل خطي مرتبه دوم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

که در آن p عدد ثابتي است به معادله ديفرانسيل **لژاندر** موسوم است.ملاحظه مي شود که نقطه $x_0 = 0$ يک نقطه معمولي معادله است بنابراين داراي جوابي بصورت:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

است که حداقل براي $|x| < 1$ همگراست .

که با جايگذاري در معادله داريم:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

با تغيير انديس داريم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x_n - \sum_{n=0}^{\infty}2xa_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}p(p+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n\right]x^n = 0$$

ورابطه بازگشتي:

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2n - p(p+1)}{(n+2)(n-1)}a_n$$
$$= \frac{n^2 - n + 2n - p^2 - p}{(n+2)(n+1)}a_n$$
$$= \frac{n^2 - p^2 + n - p}{(n+2)(n+1)}a_n$$
$$= -\frac{(p-n)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad , \quad n \ge 0$$

نتيجه مي شود که:

که با جایگذاري در معادله داريم:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3\times 4}a_2 = \frac{p(p-1)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5\times 6}a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}a_5 = -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

با قرار دادن اين ضرايب در سري داريم:

$$y = a_0 + a_1x + \left(-\frac{p(p+1)}{2!}a_0\right)x^2 + \left(-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1\right)x^3 + \left(\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0\right)x^4 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{2!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7 + \cdots\right)$$

که براي $|x|<1$ همگراست واگر p عدد صحيح نباشد شعاع همگرايي هر دو سري داخل پرانتز برابر با یک است.توابع تعريف شده در جواب سري مشهور به توابع لژاندر مي باشد که توابع متعالي هستند.در حالت خاص p جواب سري ها ممکن است متناهي باشد.

نقاط منفردمنظم معادلات ديفرانسيل خطي مرتبه دوم

فرض کنيم که نقطه x_0 يك نقطه منفرد معادله ديفرانسيل خطي همگن

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

باشد درصورتي که اگر معادله را بصورت

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

بنويسيم و $q(x), p(x)$ در x_0 تحليلي باشند، نقطه را نقطه منفرد منظم ناميم واگر $q(x), p(x)$ تحليلي نباشند را نقطه منفرد غير منظم مي گوييم.

مثال :نوع نقاط منفرد معادله ديفرانسيل

$$(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0$$

را پيدا کنيد.

حل: با تقسيم دو طرف معادله در $x-1$ ، معادله بالا به صورت

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x-1}y = 0$$

در مي آيد مشاهده مي کنيم که نقاط منفرد عبارت است از : $x=1, x=0$ با ضرب معادله بالا در x^2 داريم :

$$x^2y'' + x\frac{1}{x-1}y' - \frac{2x^2}{x-1}y = 0$$

پس $q(x) = \frac{-2x^2}{x-1}, p(x) = \frac{1}{x-1}$

که هر دو در $x=0$ تحليلي اند. پس $x=0$ يك نقطه منفرد منظم است. حال اگر طرفين معادله را در $(x-1)^2$ ضرب کنيم داريم :

$$(x-1)^2y'' + \frac{x-1}{x}y' - \frac{2(x-1)}{1}y = 0$$

که ، هردو $q(x) = -2(x-1), p(x) = \frac{1}{x}$ در $x=1$ تحليلي اند

پس $x=1$ يك نقطه منفرد منظم است.

مثال : معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

را به صورت زير مي نويسيم .

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

روشن است که $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد معادله اند که اگر طرفين معادله را در $(x-1)^2$ ضرب مي کنيم داريم :

$$(x-1)^2y'' + \frac{2x(x-1)}{(x+1)}y' - \frac{p(p+1)(x-1)}{x+1}y = 0$$

آنگاه:

$p(x)=\dfrac{2x(x-1)}{(x+1)}$ و $q(x)=\dfrac{-p(p+1)(x-1)}{x+1}$ هردو در $x=1$ تحليلي اند پس $x=1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

حال اگر طرفين معادله را در $(x+1)^2$ ضرب كنيم داريم :

$$(x+1)^2y''+\frac{2x(x+1)}{(x-1)}y'-\frac{p(p+1)(x+1)}{x-1}y=0$$

كه $p(x)=\dfrac{2x(x+1)}{(x-1)}$ و $q(x)=\dfrac{-p(p+1)(x+1)}{x-1}$ هردو در $x=-1$ تحليلي اند پس $x=-1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

مثال: معادله ديفرانسيل خطي

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

را كه به معادله بسل(Bessel) از مرتبه p معروف است در نظر مي گيريم در اين معادله كه p عدد ثابت نا صفر مي باشد با نوشتن معادله بصورت

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-p^2}{x^2}y=0$$

ملاحظه مي شود كه $x=0$ نقطه منفرد معادله مي باشد وبا توجه به توابع $p(x)=1, q(x)=x^2-p^2$ كه درنقطه $x=0$ تحليلي اند پس $x=0$ نقطه منفرد ومنظم معادله است.

تعريف: سري بصورت

$$y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+s}$$

كه در آن s عددي حقيقي ويا مختلط است به سري فروبنيوس (frobenius) مشهور است.

تذكر: اگر $x=x_0$ يک نقطه منفرد منظم معادله مرتبه دوم خطي باشد ثابت مي شود كه معادله داراي يک وگاهي دو جواب بصورت سري فروبنيوس با $a_0\neq 0$ است.

در اينجا s عددي حقيقي است

اين روش را با ارائه چند مثال توضيح مي دهيم.

مثال: معادله ديفرانسيل

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0$$

را در نظر مي گيريم واضح است كه $x_0=0$ نقطه منفرد منظم معادله است جواب سري فروبنيوس

$$y=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}$$

را در نظر مي گيريم بنابراين :

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}\Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}$$

با جايگذاري در معادله ديفرانسيل نتيجه مي شود:

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}+x(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

و يا:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

با تغيير انديس داريم :

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

$$2(s)(s-1)a_0x^s+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}+sa_0x^s$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}-a_0x^s-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x^{n+s}=0$$

و یا :

$$(2s(s-1)+s-1)a_0x^s+\sum\left[2(n+s)(n+s-1)+(n+s)-1\right]a_n+2(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}=0$$

چون فرض بر آن است که $a_0 \neq 0$ پس :

$$2s(s-1)+s-1=0$$
$$2s^2-2s+s-1=0$$
$$2s^2-s-1=0$$

این معادله را معادله شاخص و ریشه هاي آن را توان شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیم . پس توان هاي

$$s=-\frac{1}{2}, s=1$$

شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم هستند

حال به ازاي هر کدام از مقادیر s ضرایب a_n ها در رابطه بازگشتي :

$$(2(n+s)(n+s-1)+n+s-1)a_n=-2(n+s-1)a_{n-1}$$

و یا :

$$a_n=\frac{-2(n+s-1)}{2(n+s)(n+s-1)+n+s-1}a_{n-1}\quad , \quad n\geq 1$$

$$=\frac{-2(n+s-1)}{(n+s-1)(2n+2s+1)}a_{n-1}=\frac{-2}{2n+2s+1}a_{n-1}\quad , \quad n\geq 1$$

صدق مي کند .

الف) اگر $s=1$ رابطه بالا نتیجه مي دهد که :

$$a_n=\frac{-2}{2n+3}a_{n-1}\quad , \quad n\geq 1$$
$$a_1=\frac{-2}{5}a_0$$
$$a_2=\frac{-2}{7}a_1=\frac{(-2)(-2)}{5\times 7}a_0$$
$$a_3=\frac{-2}{9}a_2=\frac{(-2)(-2)(-2)}{5\times 7\times 9}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n=\frac{(-2)^n}{5\times 7\times 9\times\cdots\times(2n+3)}a_0$$

ب) اگر $s=-\frac{1}{2}$ آنگاه :

با $n\geq 1$

$$a_n=\frac{-2}{2n+2(-\frac{1}{2})+1}a_{n-1}=\frac{-2}{2n}a_{n-1}=\frac{-1}{n}a_{n-1}$$

پس :

$$a_1=\frac{-1}{1}a_0=-a_0$$
$$a_2=-\frac{1}{2}a_1=\frac{(-1)(-1)}{2}a_0$$
$$a_3=-\frac{1}{3}a_2=\frac{(-1)(-1)(-1)}{2\times 3}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n=-\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}a_0$$

در نتیجه دو جواب سري فروبینوس عبارت است از :

$$y_1=x\left(1+\frac{-2}{5}x+\frac{(-2)^2}{5\times 7}x^2+\frac{(-2)^3}{5\times 7\times 9}x^3+\cdots+\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n+\cdots\right)$$

$$y_2=x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x+\frac{(-1)^2}{2!}x^2+\frac{(-1)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\cdots\right)$$

و دو تابع y_1 , y_2 بدلیل $x^{-\frac{1}{2}}$ در بازه $(0,+\infty)$ مستقل خطي وهمگرا هستند پس :

$$y=c_1x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n\right)+c_2x^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

جواب عمومي معادله دیفرانسیل است .

حالتي که معادله شاخص داراي ریشه هاي برابر است.

تذکر: درادامه بحث خود معادلاتي را مورد بررسي قرار مي دهیم که داراي یک نقطه منفرد در $x=0$ است.در این حالت معادله به صورت $x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$ در مي آید،که در آن $q(x), p(x)$ در $x=0$ تحلیلي هستند.همچنانکه قبلا مشاهده کردیم،این محدودیت از کلیت بحث نمي کاهد، زیرابا تغییر متغیر $t=x-x_0$ نقطه منفردمنظم x_0 را به صفر تبدیل مي کند.

- بررسي حالت کلي

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

را در نظرمي گيريم . فرض $x = 0$ نقطه منفردمنظم باشد در اين صورت در $q(x), p(x)$ تحليلي هستند،در نتيجه به ازاي $|x| < R$ ، داريم:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

و y تابعي بصورت:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\partial\infty} a_n x^{n+s}$$

باشد، آنگاه:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2}$$

$$xp(x)y'(x) = x^s \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+s) a_k p_{n-k}\right) x^{n+s}$$

$$q(x)y(x) = x^s \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right) x^{n+s}$$

با قرار دادن مقادير بالا در معادله ديفرانسيل داريم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+s) a_k p_{n-k}\right) x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right) x^{n+s} = 0$$

در نتيجه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+s)(n+s-1) a_n + \sum_{k=0}^{n} [(k+s) p_{n-k} + q_{n-k}] a_k \right\} x^{n+s} = 0$$

که با فرض ضريب کوچکترين توان $(n = 0), x$ داريم:

$$s(s-1)a_0 + (sp_0 + q_0)a_0 = 0$$

چون $a_0 \neq 0$ پس $f(s) = s(s-1)sp_0 + q_0$

ويا $f(s) = s^2 + (p_0 - 1)s + q_0$

معادله شاخص مي باشد و ريشه هاي آن را **توان هاي شاخص** معادله ديفرانسيل در نقطه منفرد منظم ناميده مي شود.

ملاحظه مي شودکه سه حالت زير مي تواند در مورد معادله شاخص رخ دهد:

الف) اگر $s_1 - s_2$ عدد غير صحيح وغيرصفر باشد.

ب) اگر $s_1 - s_2$ عدد صحيح ومثبت باشد.

ج) اگر $s_1 - s_2$ صفر باشد.

در حالت الف) معادله ديفرانسيل داراي دو جواب مستقل به صورت

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ و } y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. قبلا مثالهايي در اين مورد ملاحظه شد.

در حالت ب) و ج) فقط يک جواب به صورت

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. براي پيدا کردن جواب مستقل ديگر نشان داده مي شود که جواب به صورت

$$y_2 = Ay_1(x)\log x + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

است که مي توان با مشتق گيري وجايگذاري در معادله ديفرانسيل ضرايب c_n ها و A را پيدا کردکه ممکن است مقدار A برابرصفر باشد که در اين صورت $y_2(x)$به شکل يک سري فروبينوس مي با شد.

تذکر: در فيزيک و رياضيات محض،اغلب بررسي جواب معادله ديفرانسيل $x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$

وقتي متغير مستقل x بينهايت باشد،مورد نظر است. با به کار بردن تغيير متغير $x = \frac{1}{t}$ مقادير بزرگ x با مقاديرکوچک t متناظر خواهند بود.

با جايگذاري t به جاي x جوابهايي از معادله ديفرانسيل جديد را بدست
مي آوريم که اگر معادله جديد داراي يک نقطه معمولي در $t = 0$ باشد، گوييم معادله ديفرانسيل داراي يک نقطه معمولي دربينهايت است. به همين نحو، اگر معادله جديد داراي يک نقطه منفرد منظم در $t = 0$ باشد، گوييم معادله ديفرانسيل داراي يک نقطه منفرد منظم دربينهايت است.

پايان

موفق باشيد